LIBERTAS MATHEMATICA, VOL. 4, 1984

LA FONCTION PERTURBATRICE D'UN SYSTÈME CANONIQUE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES-CALCUL NUMÉRIQUE

Ilie Popescu

Soit le système canonique

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\Lambda}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \ell}\ ;\ \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g}\ ;\ \dfrac{d\Lambda'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \ell'}\ ;\ \dfrac{dH'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g'}\ , \\ \dfrac{d\ell}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \Lambda}\ ;\ \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial H}\ ;\ \dfrac{d\ell'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \Lambda'}\ ;\ \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial H'}\ , \end{cases}$$

avec la fonction génératrice

$$(2)\qquad F = \frac{1}{2}\left(\frac{M^3\mu^2}{\Lambda^2} + \frac{M'^3\mu'^2}{\Lambda'^2}\right) + \frac{Km_3}{\varepsilon}\left(\frac{m_1}{T_{13}} + \frac{m_2}{T_{23}} - \frac{m_1+m_2}{\rho}\right) .$$

F étant holomorphe, on peut la développer en série suivant les puissances entières et positives de ε, pour les valeurs de ε suffisamment petits:

$$(3)\qquad F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots$$

Dans la théorie de Poincaré concernant les solutions périodiques d'un système d'équations différentieeles n'interviennent que F_0 et F_1, où

$$(4)\qquad F_0 = \frac{K^2 m_1^2}{2}\left(\frac{M^3}{\Lambda^2} + \frac{M'^3}{\Lambda'^2}\right) .$$

L'expression analytique de la fonction perturbatrice F_1 s'obtient de la relation

$$(5)\qquad F_1 = \frac{dF}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}$$

En utilisant le théorème du centre de gravité et en exprimant les distances r_{13} et r_{23} en fonction de r, ρ, ω et les masses m_1, m_2, m_3 des trois corps, on aura

$$F_1 = \frac{M}{2a}\,\frac{d\mu}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{M'}{2a'}\,\frac{d\mu'}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + k\,\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{m_3}{\varepsilon}\right)\left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1+m_2}{\rho}\right)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

$$+ \frac{km_3}{\varepsilon}\left[m_1\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{13}}\right) + \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{m_2}{r_{23}}\right) - \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{m_1+m_2}{\rho}\right)\right]\bigg|_{\varepsilon=0}$$

et après avoir fait les calculs on obtient

$$(6) \qquad F_1 = k\left[\frac{M^2}{2a} + \frac{M'(M+M')}{2a'} + MM'\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+r^2-2r\rho\cos\omega}} - \frac{r\cos\omega}{2} - \frac{1}{\rho}\right)\right]$$

où

$$(7) \qquad \cos\omega = \cos(g+v)\cos(g'+v') + \sin(g+v)\sin(g'+v')\cos(i+i'),$$

v et v' étant les anomalies vraies des deux mouvements. Si dans le système (1) on se limite aux deux premiers termes du développement en série de la fonction génératrice F, on obtient les expressions analytiques des fonctions de la partie droite:

$$\frac{\partial F}{\partial \ell} = \varepsilon\left\{\frac{KMM'}{TA}\left[a^2\rho\sqrt{1-e^2}\,(-\sin(g+v)\cos(g'+v')+\cos(g+v)\sin(g'+v')\cos(i+i'))\right.\right.$$
$$\left.\left. - (r-\rho\cos\omega)a^2 e\sin u\right] - \frac{a^2 e\sin u\cos\omega}{\rho^2}\right\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ell'} = \varepsilon\left\{\frac{KMM'}{\rho A}\left[a'^2 r\sqrt{1-e'^2}\,(-\cos(g+v)\sin(g'+v')+\sin(g+v)\cos(g'+v')\cos(i+i'))\right.\right.$$
$$\left.\left. - (r-\rho\cos\omega)a'^2 e'\sin u'\right] + \frac{a'^2 e'\sin u'(\rho+2r\cos\omega)}{\rho^3}\right\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial g} = \varepsilon\,\frac{KMM'r\rho}{A}\,[-\sin(g+v)\cos(g'+v')+\cos(g+v)\sin(g'+v')\cos(i+i')].$$

$$\frac{\partial F}{\partial g'} = \varepsilon\,\frac{KMM'r\rho}{A}\,[-\cos(g+v)\sin(g'+v')+\sin(g+v)\cos(g'+v')\cos(i+i')]$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda} = -k^2 m_1^2\,\frac{M^3}{\Lambda^2} - \varepsilon\,\frac{KaMM'}{A}\,(r-\rho\cos\omega)\cos u\,\frac{H}{\Lambda\sqrt{\Lambda^2-H^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda'} = -k^2 m_1^2\,\frac{M'^3}{\Lambda'^2} + \varepsilon\,ka'MM'\left(\frac{-r+\rho\cos\omega}{A} + \frac{2r\rho\cos\omega+1}{\rho^2}\right)\frac{H'\cos u'}{\Lambda'\sqrt{\Lambda'^2-H'^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial H} = -\varepsilon\,\frac{KaMM'}{A}\,(r-\rho\cos\omega)\cos u\,\frac{H}{\sqrt{\Lambda^2-H^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial H'} = \varepsilon K a' M M' \left(\frac{-r + \rho \cos\omega}{A} + \frac{2r\cos\omega + 1}{\rho^2} \right) \frac{H' \cos u'}{\sqrt{\Lambda'^2 - H'^2}}$$

où on a noté $A = (\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \omega)^{3/2}$, u et u' étant les anomalies excentriques des d x mouvements.

Le système d'équations (1) a les fonctions de la partie droite bien déterminées, dépendant de t, des huit variables canoniques Λ, Λ', H, H', ℓ, ℓ', g, g' et du paramètre ε.

Pour l'étude des solutions périodiques de troisième catégorie dans le problème des trois corps il est nécessaire de développer en série trigonométrique la fonction perturbatrice F_1, en ayant comme arguments les anomalies moyennes ℓ et ℓ'.

Soit $f(\ell)$ une fonction périodique de ℓ avec la période 2π et finie pour n'importe quelle valeur de ℓ; cette fonction peut être dévelopée pour toutes les valeurs réelles de ℓ, dans une série trigonométrique convergente:

$$(8) \qquad f(\ell) = \frac{1}{2} A_0 + (A_1 \cos \ell + B_1 \sin \ell) + (A_2 \cos 2\ell + B_2 \sin 2\ell) + \dots + (A_k \cos k\ell + B_k \sin k\ell) + \dots$$

les coéfficients A_k et B_k étant

$$(9) \qquad \begin{cases} A_k = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(\ell) \cos k\ell \, d\ell \\ B_k = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(\ell) \sin k\ell \, d\ell \end{cases}$$

Si la fonction $f(\ell)$ est paire, alors le développement (8) se réduit à:

$$(10) \qquad f(\ell) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \ell + A_2 \cos 2\ell + \dots + A_k \cos {}_k\ell + \dots$$

et si la fonction $f(\ell)$ est impaire, alors le développement se réduit à:

$$(11) \qquad f(\ell) = B_1 \sin \ell + B_2 \sin_2 \ell + \dots + B_k \sin_k \ell + \dots$$

Soit e l'excentricité de l'orbite d'une planète supposée élliptique, ℓ l'anomalie moyenne à un instant quelconque t et u, v, r les valeurs de l'anomalie excentrique, de l'anomalie vraie et respectivement le rayon vectoriel qui se rapporte au même moment t.

Considérons la fonction $f(\ell) = \cos ku$. Lorsque ℓ tend vers 2π, u tend aussi vers 2π; $\cos ku$ est donc fonction périodique de ℓ avec la periode 2π et elle est paire.

On peut développer en série sous la forme (10):

$$\cos ku = \frac{1}{2} A_o^{(k)} + A_1^{(k)} \cos \ell + A_2^{(k)} \cos 2\ell + \ldots + A_j^{(k)} \cos j\ell + \ldots \tag{12}$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} A_0^{(k)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ku \, d\ell \\ A_j^{(k)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ku \cos j\ell \, d\ell \end{aligned} \right. \tag{13}$$

De la relation

$$u - e \sin u = \ell \tag{14}$$

on déduit $d\ell = (1-e \cos u)\, du$ et il résulte:

$$A_0^{(k)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ku(1-e \cos u) du$$

pour $k = 1$ on obtient $A_0^{(k)} = 0$ et pour $k = 1$, $A_0^{(1)} = -e$.

En effectuant une intégration par parties dans les relations (13) on va obtenir

$$A_j^{(k)} = \frac{2k}{j\pi} \int_0^{\pi} \sin k\, u \sin(ju-je \sin u) du$$

et en remplacant ℓ d'après la relation (14) on aura

$$A_j^{(k)} = \frac{2k}{j\pi} \int_0^{\pi} \sin j\ell \ \sin k\, u\, du$$

ou bien

$$A_j^{(k)} = \frac{k}{j\pi} \int_0^{\pi} \cos[(k-j)u-je \sin u] du - \frac{k}{j\pi} \int_0^{\pi} \cos[(k+j)u-je \sin u] du$$

Si on fait la notation

$$J_k(e) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (ku-e \sin u) du \tag{15}$$

le coéfficient s'écrit comme suit:

$$A_j^{(k)} = \frac{k}{j} [J_{j-k}(je)-J_{j+k}(je)] \tag{16}$$

La fonction $J_k(e)$ s'appelle la fonction Bessel de premier ordre et indice k. Cette fonction admet la développement en série

$$J_k(e) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{\Gamma(h+1)\Gamma(h+k-1)} \left(\frac{e}{2} \right)^{2h+k} \tag{17}$$

où $\Gamma(s)$ est l'intégrale Euler de deuxième ordre

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} E^{-x} x^{s-1} dx \tag{18}$$

et E est le nombre "e".

En remplacant s par $s+1$ et en effectuant une intégration par parties on obtient la relation de récurence

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{19}$$

La valeur $\Gamma(\ell)$ se calcule directement et est 1. Si s est un nombre naturel, alors $\Gamma(s+1) = s!$.

Le coefficient $A_j^{(k)}$ s'écrit

$$A_j^{(k)} = \frac{k}{j} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{\Gamma(h+1)} \left[\frac{1}{\Gamma(h+j-k)} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j-k} - \frac{1}{\Gamma(h+j+k)} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j+k} \right] \tag{20}$$

On considère maintenant la fonction $f(\ell) = \sin ku$, qui est périodique de ℓ avec la période 2π, finie et impaire; on aura alors le développement en série:

$$\sin ku = B_1^{(k)} \sin \ell + B_2^{(k)} \sin 2\ell + \ldots + B_j^{(k)} \sin j\ell + \ldots \tag{21}$$

où

$$B_j^{(k)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ku \sin j\ell \, d\ell$$

ou bien

$$B_j^{(k)} = \frac{2k}{j\pi} \int_0^{\pi} \cos ku \cos(ju - je \sin u) du$$

$$= \frac{k}{j\pi} \int_0^{\pi} \cos[(j-k)u - je \sin u] du + \frac{k}{j\pi} \int_0^{\pi} \cos[(j+k)u - je \sin u] du$$

c'est à dire

$$B_j^{(k)} = \frac{k}{j} [J_{j-k}(je) + J_{j+k}(je)]. \tag{22}$$

En considérant le développement (17), le coéfficient $B_j^{(k)}$ devient:

$$B_j^{(k)} = \frac{k}{j} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{\Gamma(h+1)} \left[\frac{1}{\Gamma(h+j-k)} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j-k} + \frac{1}{\Gamma(h+j+k)} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j+k} \right] \tag{23}$$

En remplacant les coéfficients $A_j^{(k)}$ et $B_j^{(k)}$ dans les développements (12), respectivement (21), on obtient:

$$\cos ku = \frac{1}{2} A_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{k}{j} \frac{(-1)^h}{\Gamma(h+1)} \left[\frac{1}{\Gamma(h+j-k)} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j-k} - \frac{1}{\Gamma(h+j+k)} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j+k} \right] \cdot \cos j\ell \tag{24}$$

$$\sin ku = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{k}{j} \frac{(-1)^h}{\Gamma(h+1)} \left[\frac{1}{\Gamma(h+j-k)} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j-k} + \frac{1}{\Gamma(h+j+k)} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j+k} \right] \cdot \sin j\ell \tag{25}$$

Dans le cas particulier $k = 1$ on obtient:

$$\cos u = -\frac{e}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{(-1)^h}{h!(h+j-2)!} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j-1} \cdot \left[1 - \frac{1}{(h+j)(h+j-1)} \cdot \frac{j^2e^2}{4} \right] \cdot \cos j\ell \tag{26}$$

$$\sin u = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{j} \cdot \frac{(-1)^h}{h!(h+j-2)!} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j-1} \cdot \left[1 + \frac{1}{(j+j)(h+j-1)} \quad \frac{j^2e^2}{4} \right] \sin j\ell \tag{27}$$

Dans le cas des mouvements elliptiques on a:

$$r = a(1-e \cos u) \tag{28}$$

d'où

$$r = a \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} - e \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{(-1)^h}{h!(h+j-2)!} \left(\frac{je}{2} \right)^{2h+j-1} \cdot \left[1 - \frac{1}{(h+j)(h+j-1)} \cdot \frac{j^2e^2}{4} \right] \cdot \cos j\ell \right. \tag{29}$$

On déduit aussi le développement de l'expression $u - 1 = e \sin u$ et de la relation

$$\frac{a}{r} = \frac{du}{d\ell} \tag{30}$$

Il resulte:

$$(31)\qquad \frac{a}{r} = 1+e \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!(h+j-2)!} \left(\frac{je}{2}\right)^{2h+j-1} \cdot \left[1+ \frac{1}{(h+j)(h+j-1)} \frac{j^2e^2}{4}\right] \cdot \cos j\ell$$

En utilisant les développements (29) et (31) on obtient les dévelope-ments en série de $\cos v$ et $\sin v$.

On a d'abord

$$(32)\qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$$

d'où

$$(33)\qquad \cos v = -e + (1-e^2) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h'(h+j-2)!} \left(\frac{je}{2}\right)^{2h+j-1} \cdot \left[1 + \frac{1}{(h+j)(h+j-1)} \cdot \frac{j^2e^2}{4}\right] \cdot \cos j\ell$$

En considérant la relation

$$\frac{d(\frac{r}{a})}{d\ell} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin v$$

on obtient

$$(34)\qquad \sin v = \sqrt{1-e^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!(h+j-2)!} \cdot \left(\frac{je}{2}\right)^{2h+j-1} \cdot \left[1 - \frac{1}{(h+j)(h+j-1)} \frac{j^2e^2}{4}\right] \cdot \sin j\ell$$

Considerons une function S finie et bien determinée dont l'anomalie excentrique est u et ayant la période 2π; S est donc une fonction périodique admettant la même période et par conséquent on aura les développements suivants:

$$(35)\qquad S = \frac{1}{2} p_0 + p_1 \cos u + p_2 \cos 2u + \ldots + q_1 \sin u + q_2 \sin 2u + \ldots$$

$$(36)\qquad S = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \ell + a_2 \cos 2\ell + \ldots + b_1 \sin \ell + b_2 \sin 2\ell + \ldots$$

Supposons que le premier développement est connu et essayons de dé-terminer le deuxième.

On a:

$$\cos ku = \frac{1}{2} A_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^{(k)} \cos j\ell$$

$$\sin ku = \sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(k)} \sin j\ell$$

et par identification on trouve

$$\begin{cases} \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2} p_0 + p_1 A_0^{(1)} \\ a_j = p_1 A_j^{(1)} + p_2 A_j^{(2)} + \ldots + p_k A_j^{(k)} + \ldots \\ b_j = q_1 B_j^{(1)} + q_2 B_j^{(2)} + \ldots + q_k B_j^{(k)} + \ldots \end{cases}$$

En remplaçant $A_j^{(k)}$ et $B_j^{(k)}$ avec les expressions (16) respectivement (22) on obtient:

(37)
$$\begin{cases} a_0 = p_0 - p_1 e \\ a_j = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{\infty} k p_k [\dot{J}_{j-k}(je) - \dot{J}_{j+k}(je)] \\ b_j = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{\infty} k q_k [\dot{J}_{j-k}(je) + \dot{J}_{j+1}(je)] \end{cases}$$

Si on note

(38)
$$E^{\ell\sqrt{-1}} = Z$$

alors le développement (36) s'écrit:

$$S = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} a_1 (Z+Z^{-1}) + \frac{1}{2} a_2 (Z^2+Z^{-2}) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{-1}} b_1 (Z-Z^{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}} b_2 (Z^2-Z^{-2}) + \ldots$$

où

(39)
$$S = P_0 + P_1 Z + P_2 Z^2 + \ldots + P_j Z^j + \ldots$$
$$+ P_{-1} Z^{-1} + P_{-2} Z^{-2} + \ldots + P_{-j} Z^{-j} + \ldots$$

où

$$\begin{cases} P_0 = \frac{1}{2} a_0 \\ P_j = \frac{1}{2} a_j + \frac{1}{2\sqrt{-1}} b_j \\ P_{-j} = \frac{1}{2} a_j - \frac{1}{2\sqrt{-1}} b_j \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a_0 = 2P_0 \\ a_j = P_j + P_{-j} \\ b_j = \sqrt{-1}\,(P_j - P_{-j}) \end{cases} \tag{40}$$

Si on multiplie les deux membres des équations (40) par $Z^{-j}\,d\ell$ et on intègre terme par terme entre les limites 0 et 2π on obtient:

$$P_j - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S Z^{-j} d\ell \tag{41}$$

On note maintenant

$$E^{u\sqrt{-1}} = s \tag{42}$$

En utilisant la relation (34), entre Z et s on obtient la relation

$$Z = sE^{-e\sqrt{-1}\,\sin u}$$

et si on remplace $\sqrt{-1}\,\sin u$ par

$$\frac{1}{2}\left(E^{u\sqrt{-1}} - E^{-u\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)$$

on trouve

$$Z = sE^{-\frac{e}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)} \tag{43}$$

et en introduisant dans la relation (41) Z et $d\ell$ on obtient

$$2\pi P_j = \int_0^2 S s^{-j} E^{\frac{je}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)} \left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right] ds$$

et si on met

$$U = SE^{\frac{je}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)} \left[1 - \frac{e}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right]$$

on aura

$$2\pi P_j = \int_0^{2\pi} Us^{-j} du \tag{44}$$

La fonction U peut être dévelopée en série convergente

$$U = P'_0 + P'_1 z + \ldots + P'_j z^j + \ldots + P'_{-1} z^{-1} + P'_{-2} z^{-2} + \ldots + P'_{-j} z^{-j} + \ldots$$

où

$$2\pi P'_j = \int_0^{2\pi} U\ s^{-j} ds$$

En comparant cette formule avec la formule (41) on tire la conclusion que $P_j = P'_j$.

Si dans la relation (41) on intègre de 0 à 2π on obtient

$$2\pi P_j = \frac{1}{j\sqrt{-1}} \int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\ell} E^{-j\ell\sqrt{-1}} d\ell = \frac{1}{j\sqrt{-1}} \int_0^{2\pi} \frac{ds}{ds} \frac{ds}{du} Z^{-j} du$$

En utilisant la relation (43) et en remplacant $\frac{ds}{du}$ par $(s\sqrt{-1})$ on trouve

$$2\pi P_j = \frac{1}{j} \int_0^{2\pi} s^{-(j-1)} \frac{dS}{ds} E^{\frac{je}{2}(s-\frac{1}{s})} du \tag{45}$$

Si on considère la fonction

$$V = \frac{1}{j} \frac{dS}{ds} E^{\frac{je}{2}(s-\frac{1}{s})}$$

et on suppose qu'elle peut être dévelopée selon les puissances entières de s on aura

$$V = Q_0 + Q_1 s + \ldots + Q_{j-1} s^{j-1} + \ldots + Q_{-1} s^{-1} + \ldots + Q_{-j+1} s^{-j+1} + \ldots$$

En multipliant par $s^{-(j+1)}$ et en intégrant on obtient

$$2\pi Q_{j-1} = \frac{1}{j} \int_0^{2\pi} s^{-(j-1)} \frac{dS}{ds} E^{\frac{je}{2}(s-\frac{1}{s})} du \tag{46}$$

En comparant les formules (45) et (46) il résulte que $P_j = Q_{j-1}$, donc P_j est le coéfficient de s^{j-1} dans le développement de la fonction V.

Soit j et q deux nombres entiers positifs ou nuls et p un entier quelconque.

L'expression

$$I = x^{-p}(x + \frac{1}{x})^j (x - \frac{1}{x})^q \tag{47}$$

peut être dévelopée selon les puissances de x, ce développement contenant un nombre limité de termes. On note par $N_{-p,j,q}$ les termes indépendants de x dans ce développement; on peut dire aussi que $N_{-p,j,q}$ est le coéfficient de l'expression $(x + \frac{1}{x})^j (x - \frac{1}{x})^q$. $N_{-p,j,q}$ représente un nombre quelconque des nombres de Cauchy.

L'introduction de ce nombre permet la représentation sous une forme plus simple de la fonction perturbatrice et pour cela on mettra en évidence quelques unes de leurs propriétés. On a, par example

(48
$$N_{-p,j,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } j + p - q \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } j + q - p \text{ est négative ou impaire} \end{cases}$$

Egalement

$$N_{p,j,q} = (-1)^q N_{-p,j,q} \tag{49}$$

qui se déduit de l'expression (47) en remplacant x par $\frac{1}{x}$.

Cherchons l'expression analytique de $N_{-p,0,q}$ en supposant $q > p$, chose toujours possible en tenant compte de la notation (48). On a

$$x^{-p}(x - \frac{1}{x})^q = \sum (-1)^\beta \frac{1.2...q}{1.2...\alpha 1.2...\beta} x^{\alpha-\beta-p}$$

où α et β sont deux nombres entiers qui vérifient la relation $\alpha + \beta = q$.

Pour obtenir le terme constant de ce développement on doit faire $\alpha - \beta - p = 0$, d'où

$$\alpha = \frac{q+p}{2} \; ; \; \beta = \frac{q-p}{2}$$

et

$$N_{-p,0,q} = (-1)^{\frac{q-p}{2}} \frac{1.2 \ldots q}{1.2 \ldots \frac{q+p}{2} \cdot 1.2 \ldots \frac{q-p}{2}} \tag{50}$$

De la relation

$$x^{-p}(x + \frac{1}{x})^{j+1}(x - \frac{1}{x})^q = x^{-p+1}(x + \frac{1}{x})^j (x - \frac{1}{x})^q$$
$$+ x^{-p-1}(x + \frac{1}{x})^j (x - \frac{1}{x})^q$$

on déduit la relation de recurence

(51) $$N_{-p,j+1,q} = N_{-p+1,j,q} + N_{-p-1,j,q}$$

Donc pas par pas on peut obtenir les nombres Cauchy pour $j = 2,3,\dots$.

Ces considérations ont une application directe dans le développement en série trigonométrique de $(\frac{a}{r})^m$, ayant comme argument l'anomalie moyenne ℓ, m étant un numbre entier positif.

On aura:

(52) $$S = (\frac{a}{r})^m = \frac{1}{2} G_0^{(m)} + \sum_{j=1}^{\infty} G_j^{(m)} \cos_j \ell = P_0^{(m)} + 2\sum_{j=1}^{\infty} P_j^{(m)} (z^j + z^{-j})$$
$$G_j^{(m)} = 2P_j^{(m)}$$

où on a noté $G_j^{(m)} = 2P_j^{(m)}$.

La fonction S a l'expression:

$$S = [1 - \frac{e}{2}(s + \frac{1}{s})]^{-m}$$

et on peut appliquer les considérations précédentes; $P_j^{(m)}$ est le coéfficient de s^j dans le développement de la fonction

(53) $$U = [1 - \frac{e}{2}(s + \frac{1}{s})]^{-(m-1)} E^{\frac{je}{2}(s - \frac{1}{s})}$$

Le coéfficient $p_0^{(m)}$ est le terme indépendant de s dans le développement de

$$U_0 = [1 - \frac{e}{2}(s + \frac{1}{s})]^{-(m-1)}$$

qui est

$$U_0 = 1 + \frac{(m-1)m}{2!}(\frac{e}{2})^2 (s + \frac{1}{s})^2 + \dots + \frac{(m-1)m\dots(m+2j-2)}{(2j)!}(\frac{e}{2})^{2j}(s + \frac{1}{s})^{2j} + \dots$$

d'où on déduit

(54) $$\frac{1}{2} G_0^{(m)} = 1 + \frac{(m-1)m}{(1!)^2}(\frac{e}{2})^2 + \frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{(2!)^2}(\frac{e}{2})^4 + \dots$$
$$+ \frac{(m-1)m(m+1)\dots(m+2j-2)}{(2j!)^2}(\frac{e}{2})^{2j} + \dots$$

Si on note

$$(55)\qquad \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = \dfrac{m-1}{1!} \\ \alpha_2 = \dfrac{(m-1)m}{2!} \\ \alpha_h = \dfrac{(m-1)m\ldots(m+h-2)}{h!} \end{cases}$$

on aura

$$[1-\frac{e}{2}(s+\frac{1}{s})]^{-(m-1)} = \sum_{h=0}^{\infty}\alpha_h(\frac{e}{2})^h(s+\frac{1}{s})^h$$

Selon la formule (53) on aura,

$$U = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{j^q}{q!}(\frac{e}{2})^{q+h}\alpha_h(s+\frac{1}{s})^h(s-\frac{1}{s})^q$$

et en introduisant les nombres Cauchy on obtient

$$(56)\qquad G_j^{(m)} = 2\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{j^q}{q!}(\frac{e}{2})^{q+h}\alpha_h N_{-j,h,q}$$

Pour les nombres $N_{-j,h,q}$ qui ne sont pas nuls il faut que $h + q = j + 2k$, k étant un nombre positif ou nul. Il résulte d'ici que relativement à e, le coéfficient $G_j^{(m)}$ sera d'ordre j et ne contiendra que les puissances j, $j + 2$, $j + 4,\ldots$ de e.

On applique les formules précédentes dans le cas $m = 2$;

$$(\frac{a}{r})^2 = \frac{1}{2}G_0^{(2)} + \sum_{j=1}^{\infty}G_j^{(2)}\cos_j \ell$$

De la relation (54) on obtient

$$\frac{1}{2}G_0^{(2)} = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1.3}{2.4}e^4 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2j-1)}{2.4\ldots 2j}e^{2j} + \ldots$$

qui est la développement même de $(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Les notations (55) se réduisent à $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = 1$ et finalement on a

$$(57)\qquad (\frac{a}{r})^2 = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \sum_{j=1}^{\infty}G_j^{(2)}\cos_j \ell$$

Le term $\dfrac{1}{\sqrt{1-2(\frac{r}{\rho})\cos\omega+(\frac{r}{\rho})^2}}$ de l'expression de F_1 admet le développement en série

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\left(\frac{r}{\rho}\right)\cos\omega+\left(\frac{r}{\rho}\right)^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\cos\omega)r^j\frac{1}{\rho^j} \tag{58}$$

$P_j(\cos\omega)$ sont les polynômes Legendre et ils ont la forme suivante:

$$P_j(\cos\omega) = \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2j-2k)!}{2^m k!(j-k)!(j-2k)!}(\cos\omega)^{j-2k} \tag{59}$$

où $m=\frac{j}{2}$ si j est pair et $m=\frac{j-1}{2}$ si j est impair.

En tenant compte des formules (29), (31), (33), (34), (52), (54), (56), (57), (58) et (59), la fonction perturbatrice F_1 a été dévelopée en série selon les puissances entières et positives des excentricités e et e' et des inclinaisons i et i', les coéfficients de ces développements étant fonctions des demi-axes des orbites a et a'.

En abrégeant, on aura

$$F_1 = \sum \frac{1}{a'}\phi\left(\frac{a}{a'}\right)e^{\delta_1}e'^{\delta_2}[\cos(i+j')]^{\delta_3}\cos(n_1\ell+n_2\ell'+n_3g+n_4g') \tag{60}$$

où δ_1, δ_2, δ_3 sont nombres positifs pairs ou nuls et n_1, n_2, n_3, n_4 sont des constantes entières.

L'expression (60) du développement de la fonction perturbatrice F_1 contient les variables canoniques ℓ, ℓ', g, g' et les inclinaisons des deux orbites par l'intermédiaire de l'inclinaison mutuelle $i+i'$. On peut donc déduire que F_1 satisfait l'équation avec les dérivées partielles

$$\frac{\partial F_1}{\partial i} - \frac{\partial F_1}{\partial i'} = 0 \tag{61}$$

Pour $\varepsilon = 0$ on obtient

$$a = \frac{\Lambda^2}{km_1M^2} \ ; \ a' = \frac{\Lambda'^2}{km_1M'^2} \ ; \ e = \frac{\sqrt{\Lambda^2-H^2}}{\Lambda} \ ; \ e' = \frac{\sqrt{\Lambda'^2-H'^2}}{\Lambda'} \tag{62}$$

La fonction F_1 est paire par rapport à $\cos(i+i')$ et de la troisième intégrale première des aires il résulte:

$$\begin{aligned} mG\cos i + m'G'\cos i' &= \varepsilon MG\cos i + \varepsilon M'G'\cos i' \\ &= \varepsilon(H\cos i + H'\cos i') = V_Z \end{aligned}$$

d'où

$$H \cos i + H' \cos i' = \frac{V_Z}{\varepsilon} = \bar{V}_Z$$

ou on à noté par $\bar{V}_Z$ la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{V_Z}{\varepsilon}$. L'intégrale première

$$mG \sin i - m'G' \sin i' = 0$$

s'écrit

$$H \sin i - H' \sin i' = 0$$

et finalement on obtient

$$\begin{aligned}(H \cos i + H' \cos i')^2 &= H^2 + H'^2 + 2HH'\cos(i+i') - (H \sin i - H' \sin i')^2 \\ &= H^2 + H'^2 + 2HH' \cos (i+i') = \bar{V}_Z^2\end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\cos (i+i') = \frac{\bar{V}_Z^2 - (H^2+H'^2)}{2HH'}$$

En remplacant les valeurs a, a', e, e' des relations (62) et $\cos(i+i')$, il résulte que le développement de la fonction perturbatrice F_1 contient les variables canoniques Λ, Λ', H, H', ℓ, ℓ', g, g' et la constante des aires V_Z.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Chazy, J., *Mécanique Céleste*, Paris, 1953.

[2] Grémillard, J., "Recherches sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps", Bull. Astronomique t. XXII, 1958.

[3] Von Zeipel, "Recherches sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps", (Mémoire présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsala, 1904).

[4] Picard, E., *Traité d'Analyse* (tome III, Paris, 1928).

[5] Coculescu, N., Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice (Thèse, Paris, 1895).

[6] Popescu, Ilie, "Solutions périodiques d'un système d'équations différentielles", Libertas Mathematica, Vol. III, 1983, pag. 99-106, Arlington, Texas.