DIVERS PROBLEMES DE MOMENTS DANS LES MODELES DE FILES D'ATTENTE M/G/1

Simon Dahan et Fabian Todor

RESUME

Dans ce travail nous allons démontrer l'équivalence des deux expressions différentes données dans [10a] , [10b] , [2], [12b] par W.A.Rosenkrantz de l'équation intégro-différentielle liée à la fonction de répartition du temps virtuel d'attente $F(t,x)$ et à la fonction de distribution $H(y)$ du temps (général) de service dans les modèles de file d'attente M/G/1.

Nous montrerons aussi que le caractère d'unicité de la solution $(F(t,x), H(y))$ de l'équation intégro-différentielle est lié à l'existence de la solution unique du problème des moments de type Stieltjes pour la distribution du temps de service $H(y)$, [6] , [11].

INTRODUCTION

On considère le modèle de file d'attente M/G/1 , c'est-à-dire un modèle avec un processus d'arrivée poissonien (M) de paramètre $\underline{b}$, une fonction de répartition $H(y)$ pour le temps de service de type général (G) et en première hypothèse une seule station de service.

Soit $W(t)$ le temps virtuel d'attente pour le client , arrivé à l'instant t. Si la distribution (répartition) du nombre de clients $\xi(t)$ qui existent dans le système à l'instant t est connu, on peut déterminer la distribution du temps virtuel d'attente $W(t)$, de la même façon que pour le système M/M/1 (voir [10a], [3], etc.).

La procédure de détermination de la distribution de $W(t)$ en utilisant la distribution de $\xi(t)$ n'est pas facile dans le cas général quand le processus $\{\xi(t), t \geq 0\}$ n'est pas markovien. Le processus stochastique $\{W(t), t \geq 0\}$ peut être décrit par le processus à accroissements indépendants suivant:

On note par $\{\hat{W}(t), t \geq 0\}$ le processus à accroissements indépendants défini de la façon suivante:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} &\hat{W}(0) = 0 \\ &\hat{W}(t_k) = \hat{W}(t_k -) + S_k \end{aligned}$$

où S_k, $k=1,2,\ldots$ représentent les temps des services pour les unités entrées dans le système à l'instant t_k, $k=1,2,\ldots$ et $\hat{W}(t_k -)$ est la valeur de $\hat{W}$ juste à gauche de t_k.

Pour les autres valeurs de $t \in [0,\infty)$, le processus $\{\hat{W}(t), t \geq 0\}$ est linéairement décroissant de pente unité.

Le processus $\{W(t), t \geq 0\}$ représentant le temps virtuel d'attente s'exprime par le processus $\{\hat{W}(t), t \geq 0\}$ défini dans (1.1) de la façon suivante:

$$(1.2) \quad \begin{cases} W(t) = \hat{W}(t) - \inf\limits_{0 \leq \Theta \leq t} \hat{W}(\Theta) & \text{si } W(0)=0 \text{ ou si } W(0)>0 \text{ et } W(0) \leq -\inf\limits_{0 \leq \Theta \leq t} \hat{W}(\Theta) \\ W(t) = W(0) + \hat{W}(t) & \text{si } W(0)>0 \text{ et } W(0) \geq -\inf\limits_{0 \leq \Theta \leq t} \hat{W}(\Theta) \end{cases}$$

c'est-à-dire que la distribution de W(t) sera identique à la distribution de

$$\sup_{0\le\Theta\le t} \hat{W}(\Theta)$$

car, $W(t) = \hat{W}(t) - \inf_{0\le\Theta\le t} \hat{W}(\Theta) = \sup_{0\le\Theta\le t} \{ \hat{W}(t) - \hat{W}(\Theta)\}$

et le processus $\{ \hat{W}(t),\ t \ge 0 \}$ est homogène et à accroissements indépendants. D'autre part,

$$(1.3)\quad \lim_{t\to\infty} P\{W(t) \le x/W(0) = x_o\} = P\{ \sup_{0\le\Theta<\infty} \hat{W}(\Theta) \le x/W(0) = x_o\}$$

pour x et $x_0 \ge 0$

La limite de la probabilité dans (1.3) existe et est indépendante de la distribution de W(0) [12,a]. Soit:

$$(1.4)\quad F(t,x;x_o) = F(t,x) = P\{W(t) \le x/W(0) = x_o\} \qquad \text{pour } t>0 \text{ et } x_1,x_o\ge 0$$

et

$$(1.5)\quad F(0,x;x_o) = F(0,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<x_0 \\ 1 & \text{si } x_o\ge 0 \text{ et } x\ge x_0 \end{cases}$$

Si la fonction F(t,x) est continue pour $x \ge 0$, $t \ge 0$ et dérivable par rapport à x, alors elle satisfera les équations intégro-différentielles suivantes (voir [12a.], [12b.] et [2]).

$$(1.6)\quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = - b\ F(t,x) + b \int_o^x H(x-y)\ d_y\ F(t,y)$$

ou

$$(1.7)\quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = - b\ F(t,x) + b \int_o^x F(t,\ x-y)\ dH(y)$$

où <u>b</u> est le paramètre de la loi de Poisson pour le processus d'arrivée.

Les motivations des équations (1.6) et (1.7) ainsi que leur équivalence seront présentées dans le paragraphe suivant. Dans la dernière partie du travail, le problème de moments de type Stieltjes pour la distribution de service $H(y)$, sera lié au couple $(F(t,x), H(y))$ pour le système M/G/1. Le couple (F,H) sera unique quand le problème de moments pour $H(y)$ aura une solution unique. Dans le cas de l'indétermination, plusieurs couples (F,H) pourraient être trouvés en fonction de la nature de H.

L'ÉQUIVALENCE ENTRE LES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES ASSOCIÉES AU MODÈLE M/G/1

2.1 Pour établir les deux équations intégro-différentielles (1.6) et (1.7), ainsi que leur équivalence, supposons $F(t,x)$ continue pour $x \geq 0$, $t \geq 0$ et dérivable par rapport à x et t.

On considère $H(y)$ la fonction de distribution (répartition) pour le temps de service de type général (G), continue et dérivable, avec la condition $H(y) = 0$, si $y \leq 0$. Le développement de Taylor d'ordre 1 appliquée à la fonction $F(t,x)$ donnera:

$$(2.1) \quad F(t,x + \Delta t) - F(t,x) = \Delta t \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} + o(\Delta t).$$

La probabilité de l'événement $\{W(t+\Delta t) \leq x\}$ sera exprimée de deux façons, en considérant les événements incompatibles et la formule des probabilités totales.

a) $P[W(t+\Delta t)\leq x]=F(t+\Delta t,x)=(1-b\Delta t)F(t,x+\Delta t)+b\Delta t\int_0^{x+\Delta t}F(t,x-y+\Delta t)dH(y)+o(\Delta t)$

b) $P[W(t+\Delta t)\leq x]=F(t+\Delta t,x)=(1-b\Delta t)F(t,x+\Delta t)+b\Delta t\int_0^{x}H(x-y)d_yF(t,y)+o(\Delta t)$

Les hypothèses, dans les deux variantes a) et b) sont les suivantes:

1^o Pour les premiers deux termes du deuxième membre, on suppose que l'on a $\{W(t)\leq x+\Delta t\}$ et que dans l'intervalle $(t,t+\Delta t)$ il n'arrive aucun client dans le système M/G/1.

2^o Pour la deuxième paire de termes, on suppose qu'un client arrive dans l'intervalle $(t,t+\Delta t)$, dans le système M/G/1 et

- si $W(t) > \Delta t$ le temps de service y est tel que $y \leq x - W(t) + \Delta t$
- si $W(t) \leq \Delta t$ le temps de service y est tel que $y \leq x - W(t) + \alpha\Delta t$ où $0 \leq \alpha \leq 1$.

3^o Si dans l'intervalle $(t,t+\Delta t)$ arrivent plusieurs clients, dans le système M/G/1, alors la probabilité $P[W(t+\Delta t)\leq x] = o(\Delta t)$.

Si on considère la quantité $\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{F(t+\Delta t,x)-F(t,x)}{\Delta t}$

appliquée aux relations (2.1) et b) on obtient (1.6), tandis que si elle est appliquée aux relations (2.1) et a) on obtient (1.7). Parfois l'équation intégro- différentielle est utilisée sous la forme (1.6) (voir [10a]), d'autres fois les calculs et les remarques sont compatibles avec l'équation (1.7) (voir [10.b], [2]). Mais, les deux formules (1.6) et (1.7) sont équivalentes.

Cette équivalence est une conséquence du théorème 2.2, présenté ci-dessous.

2.2 Si on note par s_1 le temps de service pour l'unité arrivée dans le système au temps t_1, par $H(y)$ la probabilité $P(s_1 \leq y)$ et par $F(t,x-y+\Delta t)$ la probabilité $P[W(t) \leq x-y+\Delta t] = P[W(t)+y \leq x+\Delta t]$, on obtient:

Théorème 2.2

Si les fonctions $F(t,x)$ et $H(y)$ sont continues et différentiables, et si $P(W(t) \leq 0) = F(t,0) = 0$ alors:

$$(2.2) \quad \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{x+\Delta t} F(t,x-y+\Delta t)\, dH(y) = \int_0^x H(x-z)\, d_z F(t,z)$$

Démonstration:

Pour l'intégrale du premier membre de la relation (2.2), considérant l'additivité par rapport à l'intervalle et intégrant par parties on a:

$$I = \int_o^{x+\Delta t} F(t,x-y+\Delta t) dH(y) = F(t,x-y+\Delta t) H(y) \Big]_o^{x+\Delta t} - \int_o^{x+\Delta t} H(y) dF_y(t,x-y+\Delta t)$$
$$= F(t,0)\, H(x+\Delta t) - F(t,x+\Delta t) H(0) - \int_o^{x+\Delta t} H(y)\, dF_y(t,x-y+\Delta t)$$

On note $z = x-y+\Delta t$ et en utilisant la continuité de $F(t,z)$ et de $H(x-z+\Delta t)$ on a:

$$\lim_{\Delta t \to 0} I = \int_o^x H(x-z) dF_z(t,z) \text{ sachant que } F(t,o) = P(W(t) \leq 0) = 0$$

Remarque

Si on note $\int_0^\infty y^k dH(y)$ par μ_k le moment d'ordre k pour la distribution du temps de service $H(y)$, ainsi que par $m_n(t,x)$ le moment d'ordre n pour le temps virtuel d'attente $W(t) = X(t)$ dans le système M/G/1, en appliquant le théorème (2.21) du travail [10b.] de W. Rosenkrantz, on a la relation suivante:

$$(2.3)\quad m_n(t,x) = x^n + \int_0^t \{n(\delta-1)\, m_{n-1}(s,x) + b \sum_{j=1}^{n} \mu_j \binom{n}{j} m_{n-1}(s,x)\}ds$$

où $\delta = \mu_1 b$, b étant le paramètre de la loi de Poisson pour le flux d'entrée M et $X(t) = x$.

La formule de récurrence ci-dessus, est obtenue par la méthode des martingales, (voir [5], [8] et [10b.]) elle vient montrer l'existence des moments μ_k de la distribution de temps de service $H(y)$.

DIVERSES FORMES DES PROBLÈMES DE MOMENTS ASSOCIÉS AU MODÈLE DE FILES D'ATTENTE M/G/1.

3.1 Au paragraphe II, nous avons vu que la détermination des moments $m_n(t,x)$ pour le temps virtuel d'attente $W(t) = X(t)$ dépendent de l'existence et de la valeur des moments μ_k de la distribution du temps de service $H(y)$ dans l'intervalle $(0,\infty)$. Mais, on sait (voir [6],[11] etc...) qu'une même suite de moments peut déterminer dans certaines conditions, plusieurs densités de probabilité.

Dans notre cas le problème de moments pour la distribution du temps de service $H(y)$, où $y\in[0,\infty)$, correspond au problème de Stieltjes. En général, le problème est indéterminé et alors le couple des fonctions de distributions $(F(t,x), H(y))$ caractérisant le système n'est pas unique, à cause de la distribution $H(y)$ qui n'est pas non plus toujours déterminée par une suite de moments $\{\mu_k\}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Pour établir les conditions de détermination du problème de moments de

Stieltjes sur l'intervalle $[0,\infty)$ selon [6] nous allons utiliser la transformée de Laplace.

Théorème 3.1: Soit $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ une suite de moments. Ceux-ci vont déterminer uniquement la fonction de répartition $H(y)$ pour la variable aléatoire y prenant ses valeurs sur $[0,\infty)$ si et seulement si la série:

$$(3.1)\quad \phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_k \lambda^k}{k!} \qquad \text{où } \lambda \geqq 0$$

correspondant à la transformée de Laplace de $H(y)$ est convergente.

Démonstration: Pour tout $t > 0$ on a l'inégalité suivante:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k t^k}{k!} < e^{-t} < \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k t^k}{k!} \qquad t > 0$$

Remplaçant t par λt et intégrant par rapport à $H(y)$ on a:

$$(3.2)\quad \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k \mu_k \lambda^k}{k!} \leq \phi(\lambda) \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k \mu_k \lambda^k}{k!}$$

et lorsque $n \to \infty$ on obtient

$$(3.1)\quad \phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_k \lambda^k}{k!}$$

pour $\lambda \in [0,\lambda_o)$ où λ_o est le rayon de convergence de la série et qui est donné par

$$(3.3)\quad \lambda_o = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(-1)^n \mu_n}{n!}}{\dfrac{(-1)^{n+1} \mu_{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\mu_n}{\mu_{n+1}}$$

a) Si le rapport $\dfrac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \to c$ = constante avec $c \neq 0$ fini ou infini le rayon de convergence λ_o est infini et la solution du problème de moments est unique.

b) Si le rapport $\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \to 0$ et $\frac{(n+1)\mu_n}{\mu_{n+1}} \to \lambda_o$

On a un intervalle de convergence $[0,\lambda_0)$ pour $\lambda_o \neq 0$ et la série est divergente si $\lambda_o = 0$.

Pour les valeurs de $\lambda > \lambda_0$ le problème de moments est indéterminé, alors le couple $(F(t,x), H(y))$ n'est pas nécessairement unique. Les exemples de fonctions de distribution $H(y)$ sont nombreux dans les cas a) et b).

3.2 Nous allons déterminer dans la famille de fonctions

$$h(x;\alpha,k) = e^{-kx^\alpha} \quad \text{pour } x\varepsilon(0,\infty) \qquad \alpha > 0 , \qquad k > 0.$$

les sous-ensembles correspondants à chacun des cas a) et b).

La famille $h(x;\alpha,k)$ devient une famille de densités $f(x;\alpha,k)$ avec

$$(3.4) \quad f(x;\alpha,k) = \frac{h(x;\alpha,k)}{k^{-1/\alpha}\Gamma(1+1/\alpha)} = \frac{e^{-kx^\alpha}}{C} \quad \text{où } C = k^{-1/\alpha}\Gamma(1+1/\alpha)$$

pour $x\varepsilon(0,\infty)$ $k > 0$, $\alpha > 0$.

c'est-à-dire que $f(x;\alpha,k)$ est une famille de densités de probabilité (à cause de α et k). Les deux moments μ_n et μ_{n+1} auront les expressions suivantes:

$$\mu_n = \frac{1}{C}\int_o^\infty x^n e^{-kx^\alpha} dx; \text{ et } \mu_{n+1} = \frac{1}{C}\int_o^\infty x^{n+1} e^{-kx^\alpha} dx.$$

En intégrant $\int_o^\infty x^n e^{-kx^\alpha} dx$, on obtient

$$\int_o^\infty x^n e^{-kx^\alpha} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-kx^\alpha}\Big]_0^\infty + \frac{k\alpha}{n+1}\int_o^\infty x^{n+\alpha} e^{-kx^\alpha} dx.$$

$$(3.5) \quad \int_o^\infty x^n e^{-kx^\alpha} dx = \frac{k\alpha}{n+1}\int_o^\infty x^{n+\alpha} e^{-kx^\alpha} dx$$

et

$$\int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-kx^\alpha} dx = \frac{k\alpha}{n+\alpha+1} \int_0^\infty x^{n+2\alpha} e^{-kx^\alpha} dx \qquad \text{d'où}$$

$$(3.6) \quad \int_0^\infty x^n e^{-kx^\alpha} dx = \frac{(k\alpha)^2}{(n+1)(n+\alpha+1)} \int_0^\infty x^{n+2\alpha} e^{-kx^\alpha} dx$$

Si on utilise $\lambda = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\ \mu_n}{\mu_{n+1}}$ on obtient

$$\lambda_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1).\ \dfrac{k\alpha}{(n+1)C} \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-kx^\alpha} dx}{1/C \int_0^\infty x^{n+1} e^{-kx^\alpha} dx}$$

Pour $\alpha = 1$ on peut simplifier les intégrales et on obtient:

$$(3.7) \quad \lambda_o = \lim_{n\to\infty} k = k$$

C'est-à-dire si $\lambda \varepsilon [0,\lambda_o) = [0,k)$ la série de la transformée Laplace (3.1) formée par μ_n; $n=0,1,2,3,...$ sera convergente et on a la densité exponentielle (unique)

$$(3.8) \quad f(x;1;k) = \frac{e^{-kx}}{k^{-1}\Gamma(2)} = ke^{-kx} \qquad k > 0\ , \qquad x \ \varepsilon\ [0,\infty)$$

On peut utiliser pour μ_n l'expression (3.6) et on a:

$$\lambda_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)\quad (k\alpha)^2\ .\ \int_0^\infty x^{n+2\alpha} e^{-kx^\alpha} dx}{C \quad (n+1)(n+\alpha+1)}}{\dfrac{1}{C} \int_0^\infty x^{n+1} e^{-kx^\alpha} dx}$$

Après simplification on obtient:

$$(3.9) \quad \lambda_o = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(k\alpha)^2}{n+\alpha+1} \int_0^\infty x^{n+2\alpha} e^{-kx^\alpha} dx}{\int_0^\infty x^{n+1} e^{-kx^\alpha} dx}$$

et maintenant nous allons transformer les intégrales d'une manière conve - nable. Si on pose $x^{\alpha} = y$ on obtient:

a) $$\int_0^1 x^{n+2\alpha} e^{-kx^{\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 y^{\frac{n+\alpha+1}{\alpha}} e^{-ky} dy$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^1 e^{-ky} dy = \frac{(1-e^{-k})}{k\alpha}$$

quel que soit α.

b) $$\int_0^1 x^{n+1} e^{-kx^{\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 y^{\frac{n+2-\alpha}{\alpha}} e^{-ky} dy \geq 0$$

quel que soit α.

En utilisant a) et b), on a:

$$\lambda_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(k\alpha)^2}{n+\alpha+1} \frac{1-e^{-k}}{k\alpha} + \int_1^{\infty} x^{n+2\alpha} e^{-kx^{\alpha}} dx}{\int_0^1 x^{n+1} e^{-kx^{\alpha}} dx + \int_1^{\infty} x^{n+1} e^{-kx^{\alpha}} dx}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \left[\frac{k\alpha(1-e^{-k})}{(n+\alpha+1) \int_1^{\infty} x^{n+1} e^{-kx^{\alpha}} dx} + \frac{\frac{(k\alpha)^2}{n+\alpha+1} \int_1^{\infty} x^{n+2\alpha} e^{-kx^{\alpha}} dx}{\int_1^{\infty} x^{n+1} e^{-kx^{\alpha}} dx} \right] = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire le rayon de convergence pour la série (3.1) de la transformée de Laplace aura la valeur zéro.

Alors, la famille de densités:

$$(3.10)\quad f(x;\alpha,k) = \frac{e^{-kx^{\alpha}}}{k^{\frac{-1}{\alpha}} \Gamma(1 + \frac{1}{2})} \quad \text{pour } \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ et } x \in (0,\infty)$$

est indéterminée par les moments μ_n, n=0,1,2,3,...

En conclusion, si la distribution du temps de service $H(y)$ correspond à une densité telle que (3.8) le couple $(F(t,x),H(y))$ sera unique, tandis que si $H(y)$ correspond à une densité telle que (3.10) le couple $(F(t,x),H(y))$ n'est pas unique.

Les formules de récurrence de type (2.3) supposent l'existence des moments pour la distribution du temps de service $H(y)$, donc les conclusions de ces théorêmes dépendent de l'existence de la suite de tous les moments.

Si la suite de moments détermine uniquement la distribution du temps de service $H(y)$ comme dans le cas (3.8), alors le couple $(F(t,x),H(y))$ sera unique, tandis que si le problème de moments de Stieltjes pour cette suite est indéterminé comme dans le cas (3.10) le couple $(F(t,x),H(y))$ ne sera pas unique.

3.3 Par le théorème 3.1 nous avons établi les conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité du couple $(F(t,x),H(y))$ dans le système M/G/1.

Nous rappelons que $F(t,x)$ doit être la solution de l'équation intégro-différentielle (1.6) ou (1.7).

a) On note la transformée de Laplace pour $H(y)$ par:

(3.11) $$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH(t)$$

et supposons que $H(t)$ est absolument continue et que $\lim_{t\to\infty} \frac{dH(t)}{dt}$ existe.

Si on pose $\frac{dH(t)}{dt} = h(t)$,

la formule (3.11) deviendra

(3.12) $\psi(s) = \int_0^\infty e^{-st}h(t)dt.$

Par la transformation

$u = e^{-t}$ (3.12) devient:

(3.13) $\psi(s) = \int_0^1 u^{s-1}f(u)du$

où (3.14) $f(u) = h(-\log u)$

Nous pouvons constater que f est continu sur [0,1] si h est continu sur [0,∞]. Si on pose $m = s-1$ la formule (3.13) deviendra

(3.15) $\psi(m+1) = \mu'_m = \int_0^1 u^m f(u)du$ pour $m = 0,1,2,\dots$

et représentera la série de moments pour la fonction f.

Alors, le problème de moments de Stieltjes pour H(y) a été transformé en un problème de moments de type Hausdorff pour la fonction $f(u) = h(-\log u)$ où $h(y) = H'(y)$ dont les moments sont μ'_m; $m = 0, 1,2,\dots$.

D'après le théorème dans [6] le problème de moments de type Hausdorff sur [0,1] sera déterminé quand f(u) sera une fonction à variation bornée sur [0,1].

Étant donné un nombre fini de moments, c'est-à-dire le problème tronqué des moments de type Haurdorff, soit $\mu'_m = \int_0^1 u^m f(u)du$ pour $m=0,1,2,\dots,n-1$, on peut toujours trouver des valeurs approximatives pour la fonction f, respectivement pour la fonction H, en utilisant la formule de quadrature de Gauss et la série des polynômes orthogonaux de Legendre.

b) Si la fonction $H(t)$ est une fonction en escalier, alors la formule (3.11) deviendra:

(3.16) $$\Psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n},$$ c'est-à-dire la série Dirichlet.

Les λ_n pour $n=1,2,3,\ldots$ sont les correspondants de la variable t et les coefficients a_n ceux de la fonction $h(t) = H'(t)$.

c) Si la fonction $H(t)$ est continue croissante, mais n'est pas fonction absolument continue, alors la fonction donnée par (3.11) ne s'exprime pas par les formules telles que (3.13) ou (3.16). Dans ce dernier cas, le rôle des fonctions continues par morceaux et des fonctions à variation bornée d'ordre supérieur (voir [9]) deviendra très important.

RÉFÉRENCES

[1] H. Brass, «Eine Verallgemeinerung der Bernsteischen Operatoren», Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 36, 111-122 (1971).

[2] E. Cinlar, M. Pinsky, «A stochastic Integral in Storage Theory», Z. Wahrscheinlichkeitstheoric, Verw. Gebiete 17, 227-240 (1971).

[3] A.B. Clarke, «Awaiting Line Process of Markov Type», Ann. Math. Statist. vs (1956) pp 452-459.

[4] D. Dacunha-Castelle, M. Duflo et V. Genon-Catalot, «Exercices de probabilités et statistiques», tome 2; Masson-Paris 1984.

[5] F.B. Dynkin, «Markov Process», vol. I and II, Springer 1965.

[6] W. Feller, «An Introduction to Probability Theory and Its Applications», Vol. II, John Wiley, 1966, N.Y.

[7] L. Kantorovitch, G. Akilov, «Analyse fonctionnelle», Tome I, MIR-1981.

[8] S. Karlin, H. Taylor, «Stochastic Processes», Vol. I and II, Academic Press, N.Y., 1975-1981.

[9] T. Popoviciu, «Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur», Mathematica (CLUJ) X, 1935.

[10] W.A. Rosenkrantz,

a) «The M/G/1 Queue- A Martingale Approach», Stochastic Processes and their Applications, Tenth Conference, August 1981, Montreal.

b) Some Martingales Associated with Queueing and Storage Processes», Z. Wahrscheinlichkeitstheoric 58, 205-222 (1981).

[11] T.J. Stieltjes, «Recherches sur les fractions continues», Ann. de Toulouse (oeuvres II), VIII - IX, 1894-1895.

[12] L. Takacs,

a) Introduction to the Theory of Queues», Oxford, University Press, 1962.

b) The Time Dependence of a Single-server Queue with Poisson Input and General Service Times», Ann. Math. Stat. 33, 1962.