LIBERTAS MATHEMATICA, vol XXIII (2003)

Sur un écoulement reproductif d'un fluide visqueux, incompressible et non homogène

A. BARHOUN, A. Ben LEMLIH

Abstract. This paper deals with an existence result for reproductive weak solution to a system of non-linear equations describing the flow of a non-homogeneous viscous incompressible fluid. Then, we establish a criterion that is more general and less restrictive than those introduced by Padula [17], Ladyzhenskaya and Solonnikov [20].

Résumé. Dans cet article, nous présentons un résultat d'existence de solution faible reproductive pour un système d'équation intervenant dans la modélisation mathématique d'écoulement d'un fluide non homogène, visqueux et incompressible dont l'observation initiale satisfaisant une propriété de reproductivité. On établit ensuite, un critère d'unicité plus général et moins restrictif que celui introduit par Padula [17], Ladyzhenskaya et Solonnikov [20].

Keywords: fluide non homogène, propriété de reproductivité, approximation de type semi-Galerkin, estimations reproductives.
AMS(MOS) Subject Classification: 76D05, 35Q35.

1 Introduction

On considère un écoulement reproductif d'un fluide visqueux, incompressible et non homogène (densité variable) dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) durant un intervalle d'observation $[0, T]$. Soient u la vitesse du fluide, η le coefficient de viscosité, ρ la densité et π la pression. Le modèle est alors décrit, (voir par exemple [13, 9]) par les équations suivantes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u.u) - 2\operatorname{div}(\eta\,\mathbf{D}(u)) = \rho f - \nabla\pi, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{1.3}$$

pour $(x,t) \in \Omega\times(0,T)$. Ici, f désigne la densité des forces extérieures et $\mathbf{D}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u)$ est le tenseur de taux de déformation.

On suppose que sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine, la vitesse u vérifie

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{1.4}$$

La propriété de reproductivité pour la vitesse et la condition initiale sont

$$u|_{t=0} = u|_{t=T} \quad \text{et} \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \qquad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.5}$$

oú $\rho_0 = \rho_0(x)$ est la densité initiale donnée.

Le système (1.1)-(1.3) est représenté par les équations conservatives de l'écoulement, dont l'équation (1.1) décrit le mouvement d'un fluide visqueux (conservation de la quantité de mouvement), l'équation (1.2) modélise la continuité (conservation de la masse) et (1.3) traduit l'incompressibilité du fluide.

L'intérêt porté à l'étude du modèle (1.1)-(1.5) c'est qu'il s'adapte aux plusieurs situations réelles, en particulier l'évolution de plusieurs fluides incompressibles et non miscibles par exemple l'eau et l'huile, et l'écoulement dans un rivière contenant des matières en suspension, etc ...

Le problème à valeurs initiales classique correspondant au modèle (1.1)-(1.3) a été étudié par plusieurs auteurs citons par exemple les travaux de Antontzev et Kazhikhov [1], Antontzev *et al.* [2], Kim [8], Ladyzhenskaya et Solonnikov [20], J.L. Lions [11], Padula [16, 17], J.P.Lions [12], Simon [19], Fernandez-Cara et Guillén [6]. Antontzev et Kazhikhov [1] ont obtenu une solution faible localement en temps avec une hypothèse initiale supplémentaire imposée sur le moment ρu en utilisant principalement les approximations de type semi-Galerkin; puis Simon [19] a étendu ce résultat pour une densité initiale seulement positive et une condition initiale au sens faible pour le moment ρu. Avec les mêmes techniques, Antontzev *et al.* [2] ont obtenu une solution forte localement en temps sous des hypothèses supplémentaires pour les données. Padula [16] et Kim [8], ont obtenu un résultat similaire que [2]. J.L. Lions [11] et J.P. Lions [12] ont présenté des nouvelles versions de résultats de Antontzev et Kazhikhov [1] en utilisant des arguments analogues à ceux de Antontzev *et al.* [2].

Padula [17], Fernandez et Guillén [6] ont étudié l'existence de la solution faible du problème (1.1)-(1.3) dans un ouvert non nécessairement borné. Signalons ici, que tous ces résultats ont été présentés pour le coefficient de viscosité constant.

L'idée principale de ce travail est un nouveau découplage nous permettant d'obtenir l'existence d'une solution faible avec une propriété de reproductivité. En applicant la discritisation de type semi-Galerkin (voir Kazhikhov [7]), nous pouvons se ramener à un problème de point fixe, et en utilisant des nouvelles estimations *a priori*, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution reproductive.

Finalement ce travail est organisé comme suit: dans la section 2, nous donnons quelques notations et résultats préliminaires qu'on va utiliser dans la suite. La section 3 introduit la définition d'une solution faible en reécrivons les équations du système dans un cadre particulier, puis nous présentons un résultat d'existence de la solution faible pour le cas du coefficient de viscosité constant. Ensuite, nous donnons la preuve du théorème d'existence en introduisant deux problèmes à valeurs initiales grâce à une discritisation de type semi-Galerkin. Nous adaptons au cas de problème avec propriété de reproductivité les méthodes engendrant les problèmes à valeurs initiales classiques; cela permettra en outre, de donner des estimations *a priori* (reproductives) constructives qui conduisent à appliquer un argument de point fixe. Dans la section 4, nous établissons un critère d'unicité de la solution faible. Il généralise des critères classiques comme le critère de Ladyzhenskaya et Solonnikov [20] et celui de Okamoto [15] pour le cas du problème à valeurs initiales grâce à une propriété supplémentaire de la solution faible, qui nous a permis de faire un couplage entre les estimations reproductives de la sections précédente et celles provenant d'un problème de transport. Finalement, la section 5 généralise les résultats de la section 3 en considérant le coefficient de viscosité du fluide dépendant de la densité.

2 Préliminaires et notations

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) un ouvert borné à frontière $\partial\Omega$ régulière et soit $0 < T < +\infty$ supposé assez large. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on note par $W^{m,p}(\Omega)$ ou $W^{m,p}(\Omega)^n$ l'espace de Sobolev usuel défini sur Ω et muni de la norme $\|.\|_{m,p}$ ($m \geq -1$ désigne un entier). On note aussi par $L^p(\Omega)$ ou $L^p(\Omega)^n$ l'espace de Lebesgue sur Ω muni de la norme $\|.\|_p$, et par $\|.\|_Y$ la norme associée à un espace Y. Si X est un espace de Banach, on note par $L^p(0,T;X)$ l'espace de Banach formé par des fonctions mesurables sur $[0,T]$ à valeurs dans X et L^p-integrable au sens de Bochner. On considère encore les espaces de divergence nulle introduits pour le problème de Navier-Stokes (voir [21])

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{D}(\Omega)^n; \quad \nabla.v = 0\},$$

$$V = \text{ La fermeture de } \mathcal{V} \text{ dans } W^{1,2}(\Omega)^n,$$

$$H = \text{ La fermeture de } \mathcal{V} \text{ dans } L^2(\Omega)^n,$$

où $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compacte dans Ω. Soit $\mathbb{P}$ la projection orthogonale de $L^2(\Omega)^n$ dans H, on considère l'opérateur de Stokes $A : D(A) \subset H \to H$ défini par $A = -\mathbb{P}\Delta$ de domaine $D(A) = W^{2,2}(\Omega)^n \cap V$ qui est auto-adjoint, défini positif et caractérisé par

$$\int_\Omega Av.w\,dx = \int_\Omega \nabla v.\nabla w\,dx \qquad \text{pour tout} \quad v \in D(A), w \in V. \tag{2.1}$$

L'opérateur A^{-1} est linéaire continu de H dans $D(A)$ et puisque l'injection de $D(A)$ dans H est compacte, A^{-1} est un opérateur compact dans H et auto-adjoint; donc il existe une suite de nombres positifs $\mu_j > 0$, $\mu_{j+1} \leq \mu_j$ et une suite de fonctions $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ telle que $A^{-1}w_j = \mu_j w_j$ (pour l'existence et la régularité de ces fonctions voir par exemple [9, 21]); on note par $\lambda_j = \mu_j^{-1}$ et puisque A^{-1} a pour image $D(A)$ on obtient

$$Aw_j = \lambda_j w_j \qquad w_j \in D(A), \tag{2.2}$$

$0 < \lambda_1 < \ldots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \ldots$, $\lim_j \lambda_j = +\infty$ et $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ est une base orthogonale de H. De plus $\{w_j/\sqrt{\lambda_j}\}_{j=1}^\infty$ et $\{w_j/\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ sont aussi des bases orthogonales respectivement de V avec le produit scalaire $(\nabla u, \nabla v)$ $u, v \in V$ et de $D(A)$ avec le produit scalaire (Au, Av) $u, v \in D(A)$. On note par V_m le sous-espace engendré par les $\{w_j\}_{j=1}^m$ et par Q le cylindre $\Omega \times (0,T)$.

Remarque 2.1. Les équations (1.1) et (1.2) peuvent être remplacées par les équations non conservatives suivantes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(u.\nabla)u\right)-2\nabla.(\eta\,\mathbf{D}(u))+\nabla\pi=\rho f, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u.\nabla\rho=0. \tag{2.4}$$

En effet, d'une part, utilisant (1.2) et (1.3) dans (1.1) et d'autre part, (1.3) dans (1.2), nous obtenons respectivement (2.3) et (2.4). Si η est constante, (2.3) peut être remplacé par

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(u.\nabla)u\right)-\eta\Delta u+\nabla\pi=\rho f, \tag{2.3$'$}$$

3 Théorème d'existence

Dans ce paragraphe, nous intéressons à un résultat d'existence d'une solution faible pour le modèle reproductif (1.1)-(1.5) modélisant l'écoulement dans un domaine Ω bidimensionel avec le coefficient de viscosité constant. Les inconnues sont la densité ρ, le champ de vitesse u et la pression π.

Comme dans le cas du système de Navier-Stokes homogène et grâce aux propriétés des espaces à divergence nulle, nous pouvons définir une solution faible du problème (1.1)-(1.5) comme suit

Définition 3.1. *Soient $\rho_0\in L^\infty(\Omega)$ avec $0<\alpha\le\rho_0\le\beta<+\infty$ p.p. dans Ω et $f\in L^2(Q)$. On appelle solution faible du problème (1.1)-(1.5) le tout couple (ρ,u) vérifiant*

$$\begin{gathered}u\in L^\infty(0,T;V)\cap L^2\left(0,T;W^{2,2}(\Omega)^2\right)\\ \rho\in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)),\quad \partial_t u\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^2\right),\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\int_\Omega\partial_t(\rho u).\psi\,dx+\int_\Omega(\rho u.u+\eta\nabla u)\,\nabla\psi\,dx=\int_\Omega\rho f.\psi\,dx\\ \textit{pour presque tout } t\in[0,T] \textit{ et } \psi\in\mathcal{V},\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}\int_\Omega\partial_t\rho\phi\,dx-\int_\Omega\rho u.\nabla\phi\,dx=0\\ \textit{pour presque tout } t\in[0,T] \textit{ et } \phi\in W_0^{1,2}(\Omega),\end{gathered} \tag{3.3}$$

Le résultat principal de cette section s'énonce alors

Théorème 3.2. *Soit Ω un ouvert borné à frontière de classe $\mathcal{C}^2$. Supposons que*

$$f\in L^2(Q)\quad et\quad \rho_0\in L^\infty(\Omega)\quad avec\quad \beta\ge\rho_0\ge\alpha>0\quad p.p.\ dans\quad\Omega.$$

Alors il existe une solution faible (ρ,u) du problème (1.1)-(1.5). De plus, $\rho\ge\alpha$ p.p. dans Ω.

Comme conséquence de ce théorème, nous aurons

Corollaire 3.3. *Sous des hypothèses du théorème 3.3, il existe une fonction* $\pi \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega))$*, tel que* (ρ, u, π) *vérifie les équations (1.1)-(1.5).*

Preuve du théorème 3.3. La démonstration du théorème 3.3 est fondée essentiellement sur un argument de point fixe appliqué à une approximation de type semi-Galerkin. La définition de solution approchée utilise une discritisation de Galerkin pour la vitesse et une approximation de dimension infinie pour la densité.

On note dans toute la suite par c une constante générique dépendant seulement des données du problème $(\Omega, \eta, \alpha, \beta, T, f)$. La preuve se fait en plusieurs étapes, premièrement nous considérons un problème approché à valeurs initiales.

A) Problème approché. Soit $V_m = \{w_1, \ldots, w_m\}$ la base spéciale de V introduite par (2.1)-(2.2), elle satisfait

$$-\mathbb{P}\Delta w_j = \lambda_j w_j \quad \text{et} \quad w_j \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\ \forall j. \tag{3.4}$$

D'autre part, comme $f \in L^2(Q)$ et $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ avec $0 < \alpha \leq \rho_0 \leq \beta$ p.p. dans Ω, on peut définir respectivement

$$f_m \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega)^2),\ f_m \to f \text{ dans } L^2(Q) \text{ et } \|f_m\|_{L^2(Q)} \leq \|f\|_{L^2(Q)}, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \rho_{0m} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \\ \rho_{0m} \to \rho_0 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible}_* \text{ et dans } L^p(\Omega) \text{ faible } \forall\, 1 \leq p < +\infty, \\ \dfrac{1}{m} + \inf_\Omega \rho_0 \leq \rho_{0m} \leq \dfrac{1}{m} + \sup_\Omega \rho_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Soit maintenant $u_0 \in V_m$ donné, tel que $\|u_0\|_2 \leq \kappa$ où κ est une constante indépendante de m (définie ultérieurement), nous définissons les solutions approchées relativement à la formulation (3.1)-(3.3) comme suit; on dit que (ρ_m, u_m) est une solution approchée si

$$\rho_m \in \mathcal{C}^1(\overline{Q}), \qquad u_m \in \mathcal{C}^1([0,T]; V_m), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + u_m.\nabla \rho_m = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \quad \rho_m|_{t=0} = \rho_{0m} \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \rho_m \left(\frac{\partial u_m}{\partial t} + (u_m.\nabla) u_m \right) .w\, dx + \eta \int_\Omega \nabla u_m.\nabla w\, dx = \int_\Omega \rho_m f_m.w\, dx \\ \forall w \in V_m, \qquad u_m|_{t=0} = u_0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Dans le but de montrer l'existence de la solution approchée, nous découplons le système (3.7)-(3.9) en introduisant deux problèmes linéaires.

Pour un $v \in \mathcal{C}([0,T]; V_m)$ donné, on résout le problème suivant[2]

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad \rho \in \mathcal{C}^1(\overline{Q}) \quad \text{telles que,} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v.\nabla \rho = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \rho|_{t=0} = \rho_{0m} \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

[2] Pour simplifier l'écriture on posera $\rho = \rho_m$ et $u = u_m$.

D'autre part, pour $v \in \mathcal{C}([0,T];V_m)$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(\overline{Q})$ (solution du problème 3.10 correspondant à v), on définit le problème linéaire

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver} \quad u \in \mathcal{C}^1([0,T];V_m) \quad \text{telles que,} \\ \displaystyle\int_\Omega \left\{ \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + (\rho v.\nabla)u - \rho f_m \right).w + \eta \nabla u.\nabla w \right\} dx = 0 \\ \forall w \in V_m, \qquad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.11}$$

Le couple (ρ, u) solution de (3.10) et de (3.11) (avec v donné) est appelé la solution linéarisée du problème (3.7)-(3.9). Pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.10), nous avons les résultats suivants

Lemme 3.4. *Soient $v \in \mathcal{C}([0,T];V_m)$ et $\rho_{0m} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ vérifiant (3.6)$_3$. Alors il existe une fonction unique ρ solution du problème (3.10). De plus on a*

$$\alpha \leq \rho \leq \beta \qquad \textit{dans} \quad \overline{Q}.$$

Lemme 3.5. *Supposons que v et v_k sont deux elements de $\mathcal{C}([0,T];V_m)$ tels que v_k converge fortement vers v dans $\mathcal{C}([0,T];V_m)$. Si pour tout k, ρ_k est la solution du problème (3.10) correspondant à v_k, alors ρ_k converge dans $\mathcal{C}^1(\overline{Q})$ vers ρ (solution du problème (3.10) correspondant à v).*

La preuve du lemme 3.5 est basée essentiellement sur la méthode des caractéristiques. Si X est définie par

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac{\partial X}{\partial t} = v(X(x,t);t) \text{ dans } (0,T), \\ X(x,0) = x, \end{array}\right. \tag{3.12}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$. L'unique solution ρ de (3.10) est donc définie par

$$\rho(z,t) = \rho_{0m}\left(S_t^{-1}(z)\right) \quad \forall z \in \overline{\Omega}, \quad \forall t \in [0,T],$$

où S_t^{-1} est l'application réciproque de $S_t : x \to z = X(x,t)$ et X est la solution de (3.12) (voir Kim [8]).

La preuve du lemme 3.6 se base sur la dépendence continue de la solution du problème (3.12) par rapport à v. ∎

Pour la résolution du problème (3.12), on a le lemme suivant

Lemme 3.6. *Soit $v \in \mathcal{C}([0,T];V_m)$ donné et soit $\rho \in \mathcal{C}^1(\overline{Q})$ la solution du problème (3.10) associée à v. Alors il existe une fonction unique $u \in \mathcal{C}^1([0,T];V_m)$ solution du problème (3.11), de plus, u dépend continûment de ρ et de v, i.e., soient v et v_k deux elements de $\mathcal{C}([0,T];V_m)$ et si (ρ,u) et (ρ_k,u_k) sont respectivement leurs solutions linéarisées correspondantes, alors u_k converge vers u dans $\mathcal{C}^1([0,T];V_m)$.*

Preuve. La démonstration est basée sur la méthode de Galerkin. En effet, si v est donné dans $\mathcal{C}([0,T];V_m)$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(\overline{Q})$ est la solution du problème (3.10) associée à v, on définit la solution u du problème (3.11) par

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_j(t) w_j(x), \tag{3.13}$$

où g_j est défini par

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\,\frac{dg_j}{dt} + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)g_j + d_i = 0 \quad \text{dans} \quad [0,T], \\ 1 \leq i \leq m, \quad \{g_j(0)\}_{j=1}^{m} = \text{composantes de } u_0 \text{ dans } V_m, \end{cases} \tag{3.14}$$

avec

$$a_{ij} = \int_\Omega \rho w_i.w_j\,dx \ \in \mathcal{C}^1([0,T]),$$

$$b_{ij} = \int_\Omega \{(\rho(v.\nabla)w_j)\,.w_i + \eta\nabla w_j.\nabla w_i\}\ dx \ \in \mathcal{C}([0,T]),$$

$$d_i = -\int_\Omega \rho f_m.w_i\,dx \ \in \mathcal{C}([0,T]).$$

De plus, la matrice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^m$ est symétrique définie positive (uniformément en $t \in [0,T]$) grâce à l'orthogonalité de $\{w_j\}$ dans H et au fait que $\rho \geq \alpha > 0$. En particulier, la matrice A est inversible et par conséquent (3.14) s'écrit d'une manière équivalente sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dg}{dt} = -A^{-1}Bg - A^{-1}d, \\ g(0) \text{ donné dans } \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{3.15}$$

où $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^m$, $d = \{d_j\}_j^m$ et $g = \{g_j\}_j^m$. Donc d'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence et l'unicité d'une solution de (3.14) et par conséquent celle du problème (3.11). De plus, la solution u dépend continûment de ρ et de v grâce au système (3.15). ■

Soit (ρ, u) la solution linéarisée du problème approché, correspondant à une fonction $v \in \mathcal{C}([0,T];V_m)$ donnée. Nous introduisons donc l'application Φ_m définie par

$$\Phi_m : v \in \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{C}([0,T];V_m) \to u \in \mathcal{B}_1 \subset\ \mathcal{C}^1([0,T];V_m), \tag{3.16}$$

où $\mathcal{B}_0$ est la boule fermé de centre l'origine et de rayon κ_0 dans $\mathcal{C}([0,T];V_m)$ et $\mathcal{B}_1$ celle de rayon κ_1 dans $\mathcal{C}^1([0,T];V_m)$ avec κ_0 et κ_1 deux constantes positives indépendamment de m (déterminées ultérieurement). En utilisant des estimations sur la solution du problème (3.10)-(3.11), nous déduisons

Lemme 3.7. *L'application Φ_m est bien définie, continue et possède au moins un point fixe.*

Preuve. Nous multiplions $(3.10)_2$ par $\frac{1}{2}u.w$ pour tout $w \in V_m$ et nous intégrons sur Ω, puis nous sommons avec $(3.11)_2$, nous obtenons en particulier pour $w = u(t)$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho|u|^2\,dx + \eta\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega \rho f_m.u\,dx. \tag{3.17}$$

On en déduit donc par le lemme de Gronwall que pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\left(\int_\Omega \rho|u|^2\,dx\right)^{1/2}(t) \leq \left(\int_\Omega \rho_{0m}|v_0|^2\,dx\right)^{1/2} + \int_0^T \left(\int_\Omega \rho|f_m|^2\,dx\right)^{1/2} dt. \tag{3.18}$$

Par conséquent, les propriétés de ρ_{0m}, ρ, u_0 et f_m entraînent que u est borné dans $\mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega)^2)$ indépendamment de v, et à partir de l'expression (3.13) et le choix de la la base

$\{w_j\}$, on a

$$\sum_{j=1}^{m} |g_j(t)|^2 = \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq c \quad \forall t \in [0,T],$$

où c est une constante indépendante de m. Ceci implique que g_j $(1 \leq j \leq m)$ est borné dans $\mathcal{C}([0,T])$. Il s'ensuit alors que

$$u \quad \text{est borné dans} \quad \mathcal{C}([0,T]; V_m). \tag{3.19}$$

D'autre part, utilisant la régularité des coefficients du problème (3.14) et supposant en outre, que v est borné dans $\mathcal{C}([0,T]; V_m)$, nous pouvons déduire que $\dfrac{dg_j}{dt}$ est borné dans $\mathcal{C}([0,T])$ pour tout $j \in \{1, ..., m\}$. Ce qui nous donne, grâce à l'expression (3.13), l'estimation

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{est borné dans} \quad \mathcal{C}([0,T]; V_m). \tag{3.20}$$

Par conséquent, on en déduit l'existence de deux constantes κ_0 et κ_1 telles que

$$\begin{cases} \|u\|_{\mathcal{C}([0,T];V_m)} \leq \kappa_0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}([0,T]; V_m), \\ \|v\|_{\mathcal{C}([0,T];V_m)} \leq \kappa_0 \text{ entraîne } \|u\|_{\mathcal{C}^1([0,T];V_m)} \leq \kappa_1, \end{cases}$$

donc l'expression (3.16) est bien définie et continue. D'autre part, grâce au théorème d'Ascoli-Arzela, $\mathcal{B}_1$ s'injecte d'une manière compacte dans $\mathcal{C}([0,T]; V_m)$ et comme $\mathcal{B}_0$ est une boule fermée de l'espace $\mathcal{C}([0,T]; V_m)$, le théorème de Schauder affirme donc l'existence d'un point fixe de l'application Φ_m. ■

Soient u_m le point fixe de Φ_m ainsi déterminé et ρ_m la solution correspondante du problème (3.10). Alors (ρ_m, u_m) est solution approchée du problème (3.7)-(3.9) satisfaisant

$$\rho_m \in \mathcal{C}^1(Q), \qquad \alpha \leq \rho_m \leq \beta \quad \text{dans} \quad \overline{Q}. \tag{3.21}$$

Pour l'unicité de la solution approchée (ρ_m, u_m), on a le résultat suivant qui est à la base de la section 4 qui suive.

Soient (ρ_m^1, u_m^1) et (ρ_m^2, u_m^2) deux solutions[3] du problème (3.7)-(3.9), alors à partir de (3.8) et (3.9) les fonctions $\rho = \rho_1 - \rho_2$ et $u = u_1 - u_2$ satisfont

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \rho_2 \left(\partial_t u + (u.\nabla)u_1 + (u_2.\nabla)u\right).w \, dx + \eta \int_\Omega \nabla u.\nabla w \, dx = \\ \displaystyle\int_\Omega \rho \left(f_m - \partial_t u_1 - (u_1.\nabla)u_1\right).w \, dx \quad \forall w \in V_m \,, \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\partial_t \rho + u_2.\nabla\rho = -u.\nabla\rho_1 \qquad \text{dans} \quad Q, \tag{3.23}$$

$$\rho|_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad u|_{t=0} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{3.24}$$

Les régularités de u_i et ρ_i $(i = 1, 2)$ entraînent que $u.\nabla\rho_1 \in \mathcal{C}(\overline{Q})$, par conséquent, les résultats obtenus pour un problème de transport (voir DiPerna et Lions [5]) permettent de caractériser la solution ρ du système (3.23)-(3.24)$_1$ par l'estimation de l'énergie suivante

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho\|_2^2 = -\int_\Omega \rho u.\nabla\rho_1 \, dx. \tag{3.25}$$

[3] Pour simplifier, on posera $\rho_i = \rho_m^i$ et $u_i = u_m^i$ $(i = 1, 2)$.

De plus, les estimations obtenues sur le problème de transport correspondant à (ρ_2, u_2) permettent d'écrire (voir encore DiPerna et Lions [5])

$$-\int_0^t \int_\Omega \rho_2 \left(\partial_t \varphi + u_2.\nabla\varphi\right) dx + \int_\Omega \rho_2 \varphi \, dx = \int_\Omega \rho_0 \varphi(0) \, dx, \tag{3.26}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{Q})$. D'autre part, remplaçant dans (3.22) w par u, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_2 \left(\frac{d}{dt}|u|^2 + u_2.\nabla|u|^2\right) dx + \eta\|\nabla u\|_2^2 = \\ -\int_\Omega \left((\rho_2 u.\nabla)u_1\right).u\, dx + \int_\Omega \rho\left(f_m - \partial_t u_1 - (u_1.\nabla)u_1\right).u\, dx. \tag{3.27}$$

En se basant sur les régularités de ρ_i et u_i $(i = 1, 2)$, l'égalité (3.26) est encore satisfaite pour tout $\varphi \in W^{1,1}(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$. On peut alors utiliser dans (3.26) $\varphi = |u|^2$, d'où on obtient pour tout $t \in [0, T]$

$$\int_0^t \int_\Omega \rho_2 \left(\frac{d}{dt}|u|^2 + u_2.\nabla|u|^2\right) dx = \int_\Omega \rho_2 |u|^2 \, dx. \tag{3.28}$$

On intègre (3.27) dans $(0, t)$, on en déduit grâce à (3.28) que

$$\frac{1}{2}\left(\int_\Omega \rho_2|u|^2\, dx\right)(t) + \eta\int_0^t \|\nabla u\|_2^2 = -\int_0^t\int_\Omega \left((\rho_2 u.\nabla)u_1\right).u\, dx + \\ +\int_0^t\int_\Omega \rho\left(f_m - \partial_t u_1 - (u_1.\nabla)u_1\right).u\, dx. \tag{3.29}$$

Intégrant maintenant (3.25) entre 0 et t, puis nous sommons le résultat avec (3.29) on obtient

$$\left(\int_\Omega \rho_2|u|^2\, dx\right)(t) + \|\rho(t)\|_2^2 + 2\eta\int_0^t \|\nabla u\|_2^2 = -2\int_0^t\int_\Omega \left((\rho u.\nabla)u_1\right).u\, dx + \\ + 2\int_0^t\int_\Omega \rho\left[f_m - \partial_t u_1 - (u_1.\nabla)u_1\right].u\, dx - 2\int_0^t\int_\Omega \rho u.\nabla\rho_1\, dx. \tag{3.30}$$

En tenant compte des régularités de ρ_i, u_i et f_m, le membre droit de (3.30) est donc majoré par

$$\int_0^t \|\nabla u_1\|_\infty \left(\int_\Omega \rho_2|u|^2\, dx\right) + \frac{1}{\alpha}\left(\int_\Omega |\rho|^2\, dx\right)\int_0^t (\|f_m\|_1\|u\|_\infty + \\ + \|\partial_t u_1\|_2\|u\|_2 + \|(u_1.\nabla)u_1\|_1\|u\|_\infty + \|u\|_\infty\|\nabla\rho_1\|_2), \\ \equiv c\int_0^t h\left(\int_\Omega \rho_2|u|^2\, dx + \|\rho\|_2^2\right),$$

où $h \in L^1(0, T)$. Donc le lemme de Gronwall permet de conclure, à partir de (3.24), que

$$\left(\int_\Omega \rho_2|u|^2\, dx\right)(t) + \|\rho(t)\|_2^2 = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

i.e., $\rho_1 = \rho_2$ et $u_1 = u_2$ dans Q. ■

On est ainsi conduit à introduire naturellement l'application $\Psi(u_0) = u_m(T)$ oú (ρ_m, u_m)

est l'unique solution du problème approchée (3.7)-(3.9).

B) Estimations *a priori* de la solution approchée. Dans un premier lieu, la condition (3.21) entraîne naturellement que

$$\begin{cases} \rho_m \text{ est borné dans } L^\infty(Q), \\ \alpha \leq \rho_m \leq \beta \text{ dans } \overline{Q}. \end{cases} \tag{3.31}$$

D'autre part, de l'estimation d'énergie (3.17), nous pouvons établir grâce au lemme de Gronwall et aux propriétés des données u_0 et f_m, que

$$u_m \quad \text{demeure dans un borné de} \quad L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V). \tag{3.32}$$

Reprenant l'estimation d'énergie (3.17), on obtient grâce à l'inégalité de Poincaré

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_m |u_m|^2\,dx + \eta\lambda_1 \int_\Omega |u_m|^2\,dx \leq \left(\int_\Omega \rho_m |u_m|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \rho_m |f_m|^2\,dx\right)^{1/2}, \tag{3.33}$$

où λ_1 est définie dans (2.2). Ainsi, de (3.31) et de l'inégalité de Young, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_m |u_m|^2\,dx + \frac{\eta\lambda_1}{\beta}\int_\Omega \rho_m |u_m|^2\,dx \leq \frac{\beta}{\eta\lambda_1}\int_\Omega \rho_m |f_m|^2\,dx. \tag{3.34}$$

Donc, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\left(\int_\Omega \rho_m |u_m|^2\,dx\right)(t) \leq \beta e^{\frac{-\eta\lambda_1 t}{\beta}} \|u_0\|_2^2 + \frac{\beta^2}{\eta\lambda_1}\int_0^t \|f_m(s)\|_2^2 e^{\frac{-\eta\lambda_1(t-s)}{\beta}}\,ds. \tag{3.35}$$

En particulier, nous pouvons déduire que

$$\|u_m(T)\|_2^2 \leq \frac{\beta}{\alpha} e^{\frac{-\eta\lambda_1 T}{\beta}} \|u_0\|_2^2 + \frac{\beta^2 \|f\|_{L^2(Q)}^2}{\alpha\eta\lambda_1}. \tag{3.36}$$

Comme T est assez large, on en déduit que si κ est choisi tel que

$$\kappa^2 \geq \frac{\beta^2 \|f\|_{L^2(Q)}^2}{\eta\lambda_1 \left(\alpha - \beta e^{\frac{-\eta\lambda_1 T}{\beta}}\right)}, \tag{3.37}$$

alors de (3.36), on a $\|u_m(T)\|_2 \leq \kappa$.

Par conséquent et grâce au choix de la base $\{w_j\}$ (système orthogonal dans H) l'application Ψ envoyant la boule[4] de V_m de centre l'origine et de rayon κ dans elle même est continue. On a ainsi, l'existence d'un point fixe, i.e.

$$u_m(0) = u_m(T). \tag{3.38}$$

Utilisons maintenant $\partial_t u_m$ comme fonction test dans la version conservative de l'équation (3.9) on obtient donc à partir de (3.31)

$$\frac{\eta}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2 + \alpha\|\partial_t u_m\|_2^2 \leq \beta\|\partial_t u_m\|_2 \left(\|f_m\|_2 + \|u_m\|_4 \|\nabla u_m\|_4\right). \tag{3.39}$$

Par une inégalité de Young, l'estimation (3.39) devient

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2 + \|\partial_t u_m\|_2^2 \leq c\left(\|f_m\|_2^2 + \|u_m\|_4^2 \|\nabla u_m\|_4^2\right), \tag{3.40}$$

[4] La boule étant muni par la norme $\|.\|_2$.

où c est une constante dépendant de α, β et η $\left(c = \frac{\alpha}{\beta^2}\min(\alpha,\eta)\right)$. Grâce au choix des fonctions w_j, il est possible de prendre $\mathbb{P}\triangle u_m$ comme fonction test dans $(3.9)_1$; il en résulte que

$$\|\mathbb{P}\triangle u_m\|_2 \leq \frac{\beta}{\eta}\left(\|f_m\|_2 + \|\partial_t u_m\|_2 + \|u_m\|_4\|\nabla u_m\|_4\right). \tag{3.41}$$

On utilise les inégalités d'interpolation classiques (on pourra consulter également Ladyzhenskaya [9] et Temam [21])

$$\begin{cases} \|\varphi\|_4 \leq c\|\varphi\|_2^{1/2}\|\nabla\varphi\|_2^{1/2} \quad \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)^2, \\ \|\nabla\varphi\|_4 \leq c\|\varphi\|_{1,2}^{1/2}\|\varphi\|_{2,2}^{1/2} \leq c\|\varphi\|_2^{1/4}\|\varphi\|_{2,2}^{3/4} \quad \forall\varphi \in W^{2,2}(\Omega)^2, \\ \|\Delta\varphi\|_2 \leq c\|\mathbb{P}\Delta\varphi\|_2 \quad \forall\varphi \in D(A), \end{cases} \tag{3.42}$$

on en déduit grâce, à (3.32), que

$$\|\mathbb{P}\triangle u_m\|_2 \leq c\left(\|f_m\|_2 + \|\partial_t u_m\|_2 + \|u_m\|_{1,2}\|\mathbb{P}\Delta u_m\|_2^{1/2}\right), \tag{3.43}$$

en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\|\mathbb{P}\triangle u_m\|_2 \leq c\left(\|f_m\|_2 + \|\partial_t u_m\|_2 + \|u_m\|_{1,2}^2\right). \tag{3.44}$$

Le membre droit dans (3.40) est donc majoré par

$$c\left(\|f_m\|_2^2 + \|u_m\|_{1,2}^2\|\mathbb{P}\Delta u_m\|_2\right). \tag{3.45}$$

Ensuite, à partir de (3.44) et de l'inégalité de Young, nous pouvons déduire que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2 + \|\partial_t u_m\|_2^2 \leq c\left(\|f_m\|_2^2 + \|u_m\|_{1,2}^4\right). \tag{3.46}$$

D'autre part, d'après (3.32), on a pour tout $t \in [0, T-1]$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_t^{t+1} \|\nabla u_m\|_2^2\, ds \leq \|u_m\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq c, \\ \displaystyle\int_t^{t+1} \|f_m\|_2^2\, ds \leq \|f\|_{L^2(Q)}^2, \end{cases} \tag{3.47}$$

de sorte que l'on peut appliquer le lemme de Gronwall uniforme suivant

Lemme 3.8. *Soient g, h et y trois fonctions positives, localement integrable pour $t_0 \leq t < +\infty$, avec*

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h \qquad \forall t \geq t_0,$$

et $\int_t^{t+1} y(s)\, ds \leq \xi_1$, $\int_t^{t+1} h(s)\, ds \leq \xi_2$, $\int_t^{t+1} g(s)\, ds \leq \xi \quad \forall t \geq t_0$, où ξ_1, ξ_2 et ξ sont trois constantes positives. Alors

$$y(t+1) \leq (\xi_1 + \xi_2)e^{\xi} \qquad \forall t \geq t_0.$$

Preuve. Voir par exemple Temam [22] p. 89. ■

Donc, il existe une constante c indépendante de m tel que

$$\|u_m(T)\|_{1,2}^2 \leq c. \tag{3.48}$$

Comme u_0 est un point fixe de l'application Ψ, alors de (3.48), il résulte que $\|u_0\|_{1,2}$ est borné indépendamment de m et par conséquent, en partant de (3.32), nous déduisons grâce au lemme de Gronwall appliqué à l'inégalité (3.46) que

$$\begin{cases} u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;V), \\ \partial_t u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0,T;H). \end{cases} \tag{3.49}$$

Ainsi de (3.42), (3.44) et (3.49), il vient que

$$u_m \quad \text{demeure dans un borné de} \quad L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)^2). \tag{3.50}$$

Les injections de Sobolev entraînent que u_m est borné dans $L^\infty(0,T;L^p)\cap L^2(0,T;L^\infty)$ pour tout p fini, puisque $V\subset L^p(\Omega)^2$ et $W^{2,2}(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$. Donc la version conservative de l'équation (3.8) et l'estimation (3.31), permettent de déduire que pour tout $p\in[1,+\infty[$, on a

$$\partial_t\rho_m \quad \text{est borné dans} \quad L^\infty(0,T;W^{-1,p}(\Omega))\cap L^2(0,T;W^{-1,\infty}(\Omega)). \tag{3.51}$$

C) Processus de passage à la limite. Pour la suite, nous avons besoin des résultats de compacité introduits par Aubin-Lions (voir [10]) et Simon [18], pour cela, on considère le lemme suivant (voir Simon [18]),

Lemme 3.9. *Soient X, B et Y trois espaces de Banach tels que $X\subset B\subset Y$, avec l'injection $X\subset B$ est compacte. Alors, si $0<T<+\infty$, l'injection suivante est compacte*

$$L^\infty(0,T;X)\cap\{v;\ \partial v_t\in L^r(0,T;Y)\}\subset\mathcal{C}([0,T];B) \quad \textit{si} \quad 1<r\leq+\infty.$$

Dans un premier temps, les estimations obtenues antérieurement pour ρ_m dans (3.31) et (3.51) permettent d'appliquer le lemme 3.10 pour $X=L^\infty(\Omega)$, $B=W^{-1,+\infty}(\Omega)$, $Y=W^{-1,p}(\Omega)$ et $r=2$, ce qui entraîne que

$$\rho_m \quad \text{est borné dans un compacte de} \quad \mathcal{C}\left([0,T];W^{-1,\infty}(\Omega)\right). \tag{3.52}$$

De même, utilisant encore le lemme 3.10 pour $X=V$, $B=H$ et $Y=H$, nous pouvons déduire, grâce à l'estimation (3.49) que

$$u_m \quad \text{reste borné dans un compacte de} \quad \mathcal{C}\left([0,T];H\right). \tag{3.53}$$

Par conséquent, les estimations citées ci-dessus et les propriétés de compacité (3.52) et (3.53) permettent de définir des suites extraites de (ρ_m) et de (u_m) (notées encore (ρ_m) et (u_m)) telles que, il existe des fonctions $\rho\in L^\infty(\Omega)$ et $u\in L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)^2)$ satisfont

$$\rho_m\to\rho \quad \text{dans} \quad \begin{cases} L^\infty(Q) \text{ faible}_*, \\ \mathcal{C}\left([0,T];W^{-1,\infty}(\Omega)\right) \text{ fort}, \end{cases} \tag{3.54}$$

$$u_m\to u \quad \text{dans} \quad \begin{cases} L^\infty(0,T;V) \text{ faible}_*, \\ L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)^2) \text{ faible}, \\ \mathcal{C}([0,T];H) \text{ forte}. \end{cases} \tag{3.55}$$

Utilisant maintenant (3.51) et (3.55), nous déduisons que $\rho_m u_m\to\rho u$ dans[5] $\mathcal{D}'(Q)$ et dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)$ faible$_*$ et $\partial_t\rho_m\to\partial_t\rho$ dans $L^\infty\left(0,T;W^{-1,p}(\Omega)\right)$ faible$_*$ ($p\leq 1$ fini). Donc, par passage à la limite dans la version non conservative de l'équation (3.8),

[5] $\mathcal{D}'(Q)$ désigne l'espace des distributions sur Q.

on trouve l'expression (1.2) au sens de $\mathcal{D}'(Q)$ et par suite dans $L^\infty\left(0,T;W^{-1,p}(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;W^{-1,\infty}(\Omega)\right)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$ grâce aux propriétés de régularité obtenues pour ρ et u.

D'autre part, pour passer à la limite dans l'expression (3.9), nous aurons besoin du résultat suivant

Lemme 3.10. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne et soit $1 \leq p, q \leq +\infty$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, alors l'application $(u,v) \to uv$ est bien définie et continue de $W^{1,p}(\Omega) \times W^{-1,q}(\Omega)$ dans $W^{-1,r}(\Omega)$ où $\frac{1}{r} = \frac{1}{p*} + \frac{1}{q}$ et $p*$ désigne l'exposant de Sobolev de p.*

Pour la preuve de ce lemme, voir appendice. ∎

Donc, en vertu du lemme 3.11, l'application $(u,v) \in W^{1,p} \times W^{-1,\infty} \to uv \in W^{-1,p}$ est continue et avec les estimations (3.50) et (3.51), nous déduisons que $u_m \partial_t \rho_m$ est borné dans $L^2\left(0,T;W^{-1,p}(\Omega)^2\right)$ pour tout p fini, et d'après (3.31) et (3.49), $\rho_m \partial_t u_m$ est borné dans $L^2(Q)$. Par conséquent $\partial_t(\rho_m u_m)$ est borné dans $L^2\left(0,T;W^{-1,p}(\Omega)^2\right)$. D'autre part, $\rho_m u_m$ est borné dans $L^2\left(0,T;L^\infty(\Omega)^2\right)$ grâce à (3.31) et (3.50). Donc le lemme de Aubin-Lions (voir Lions [10] p. 57) entraîne la convergence forte de $\rho_m u_m$ vers ρu dans $L^2\left(0,T;W^{-1,\infty}(\Omega)^2\right)$.
Utilisant encore le lemme 3.11 pour les espaces $(W^{1,2} \times W^{-1,\infty}, W^{-1,2})$, nous pouvons avoir la convergence forte de $\rho_m u_m.u_m$ vers $\rho u.u$ dans $L^2\left(0,T;W^{-1,2}(\Omega)^4\right)$.

Par conséquent, en passant à la limite dans la version non conservative de l'équation $(3.9)_1$, nous obtenons (3.2) grâce à un processus de densité.

Finalement la propriété (3.55) entraîne la convergence dans H de $u_m(0)$ et de $u_m(T)$ respectivement vers $u(0)$ et $u(T)$, par suite, de (3.38), nous obtenons

$$u(0) = u(T). \tag{3.56}$$

D'autre part, de (3.54), on a $\rho_m(0) \to \rho(0)$ dans $W^{-1,\infty}(\Omega)$, par conséquent tenant compte de (3.6), nous avons $\rho(0) = \rho_0$. Ainsi s'achève la preuve du théorème 3.3. ∎

Preuve du corollaire 3.3. En partant de l'expression non conservative (2.3) nous pouvons déduire grâce aux propriétés de ρ, u et f que

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + (\rho u.\nabla)u - \eta\Delta u - \rho f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2).$$

En outre, d'après la conclusion faite sur la convergence de $(3.9)_1$, on a

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla.(\rho u.u) - \eta\Delta u - \rho f\right).v\,dx = 0 \quad \forall v \in V.$$

Donc le lemme de De Rham (voir [4]), permet de déduire l'existence d'une fonction $\pi \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$ tel que

$$\nabla\pi = \rho\frac{\partial u}{\partial t} + (\rho u.\nabla)\,u - \eta\Delta u - \rho f.$$

Par conséquent, (ρ,u,π) est solution du problème reproductif (1.1)-(1.5). ∎

Remarque 3.11. Il est clair que, d'après le lemme de De Rham, la fonction π (pression) est définie à une constante additive près.

Remarque 3.12. On pourrait se poser le problème de savoir si le choix de la condition (3.37) est possible. En effet,

$$\frac{\beta}{\alpha}\exp\left(-\frac{\eta\lambda_1 T}{\beta}\right) < 1 \Leftrightarrow T > \frac{\beta}{\eta\lambda_1}\log\frac{\beta}{\alpha},$$

si, par conséquent, T est assez large, notre choix (condition (3.37)) est donc raisonnable. De même, ce choix est encore raisonnable si par exemple le coefficient de viscosité η est assez grand,

$$\eta > \frac{\beta}{T\lambda_1}\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

4 Sur l'unicité de la solution faible

L'unicité de la solution faible du problème (1.1)-(1.5) est encore une question ouverte; la situation est similaire à celle du problème de Navier-Stokes tridimensionnel. Cependant, les premiers résultats d'unicité ont été introduits pour le cas du problème à valeurs initiales correspondant à (1.1)-(1.4) par Ladyzhenskaya et Solonnikov [20] concernant la solution régulière, i.e., la solution faible vérifié en outre $\rho \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ et $\partial_t\rho \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$. Plus précisément, ils ont montré le résultat suivant

Théorème 4.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné à frontière dans $\mathcal{C}^2$ et $q > n$. Si*

$$u_0 \in W^{2-\frac{2}{q},q} \cap V, \quad \rho_0 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \quad \textit{avec} \quad \rho_0 \geq \alpha > 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega.$$

Alors il existe $T_* \leq T$ tel que le problème à valeurs initiales correspondant à (1.1)-(1.4) admet une solution régulière (ρ, u, π) unique. De plus

$$\rho \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times [0,T_*]),$$
$$u, \nabla u, \nabla^2 u \quad \textit{et} \quad \partial_t u \in L^q(\Omega \times (0,T_*)),$$
$$\pi, \nabla\pi \in L^q(\Omega \times (0,T_*)) \quad \textit{et} \quad \int_\Omega \pi(x,t) = 0 \quad \textit{p.p. dans} \ (0,T_*).$$

Ensuite, Okamoto [15] a obtenu un résultat similaire a celui de [20], en considérant le cas $f = 0$. Il a utilisé la version hilbirtienne du cadre fonctionnel de [20] en se basant sur la théorie abstraite des équations paraboliques. Notons que dans [15], Okamoto a considéré une hypothèse moins restrictive sur ρ_0, à savoir, $\rho_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $\rho \geq \alpha > 0$ dans Ω.

D'autre part, Padula a montré dans [17] que si (ρ_1, u_1, π_1) et (ρ_2, u_2, π_2) sont deux solutions faibles du problème à valeurs initiales (1.1)-(1.4),telles que[6]

$$f \in L^\infty(0,T;L^4(\Omega)^n), \quad \rho_0 \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega) \quad \text{avec}$$
$$0 < a \leq \rho_0(x)|x|^k < b \quad \text{et} \quad |\nabla\rho_0(x)|.|x|^\lambda < c \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

avec $4\lambda > 3k$ et a, b, c sont des constantes et

$$\partial_t\rho \in L^2(Q), \nabla u \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega)^n) \quad \text{et} \quad \partial_t\nabla u \in L^2(Q),$$

alors les fonctions (ρ_1, u_1, π_1) et (ρ_2, u_2, π_2) coincides.

[6] Ici, Ω pas nécessairement borné.

Dans cette section, nous allons obtenir un résultat d'unicité plus général et avec une hypothèse moins restrictive, nous avons donc

Théorème 4.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à frontière de classe $\mathcal{C}^2$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T;L^q(\Omega)^2)$ pour tout $q \in (2,+\infty)$. Si (ρ_1,u_1,π_1) et (ρ_2,u_2,π_2) sont deux solutions faibles*[7] *du problème (1.1)-(1.5) et si de plus (ρ_1,u_1) vérifie en outre,*

$$\partial_t u_1, \nabla\rho_1 \in L^2(0,T;L^q(\Omega)^2), \quad \forall q \in (2,+\infty). \tag{4.1}$$

alors nous aurons $\rho_1=\rho_2$, $u_1=u_2$, et $\nabla\pi_1=\nabla\pi_2$.

Preuve. Nous allons suivre la démarche utilisée dans la preuve de l'unicité pour la solution approchée. posons $\rho=\rho_1-\rho_2$, $u=u_1-u_2$ et $\pi=\pi_1-\pi_2$. Alors (ρ,u,π) est solution du problème suivant

$$\begin{aligned}\rho_2\left[\partial_t u+(u.\nabla)u_1+(u_2.\nabla)u\right]+\eta\Delta u+\nabla\pi = \\ \rho\left[f-\partial_t u_1-(u_1.\nabla)u_1\right] \quad \text{dans} \quad L^2(Q),\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\partial_t\rho+u_2.\nabla\rho=-u.\nabla\rho_1 \qquad \text{dans} \quad L^2(0,T;W^{-1,\infty}(\Omega)), \tag{4.3}$$

$$\rho|_{t=0}=0 \quad \text{et} \quad u|_{t=0}=u|_{t=T} \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{4.4}$$

Par conséquent, l'analyse introduite dans (3.22)-(3.29) permet à l'aide de $(4.4)_1$ d'obtenir l'estimation d'énergie suivante

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega \rho_2|u|^2\,dx\right)(t)+\|\rho(t)\|_2^2+2\eta\int_0^t\|\nabla u\|_2^2 = -2\int_0^t\int_\Omega\left((\rho u.\nabla)u_1\right).u\,dx+ \\ +2\int_0^t\int_\Omega\rho\left[f-\partial_t u_1-(u_1.\nabla)u_1\right].u\,dx-2\int_0^t\int_\Omega\rho u.\nabla\rho_1\,dx.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ensuite, utilisant l'inégalité de Hölder, nous pouvons déduire que le membre droit de (4.5) est majoré par

$$\begin{aligned}\int_0^t\|\nabla u_1\|_2\left(\int_\Omega\rho_2|u|^2\,dx\right)+\int_0^t\{\|\rho\|_2\|f\|_q\|\nabla u\|_2+\|\rho\|_2\|\partial_t u_1\|_q\|\nabla u\|_2+ \\ \|\rho\|_2\|\nabla u_1\|_2\|\nabla u\|_2\|u_1\|_{2,2}\}+\int_0^t\|\rho\|_2\|\nabla u\|_2\|\nabla\rho_1\|_q,\end{aligned} \tag{4.6}$$

pour tout $q\in(2,+\infty)$. Finalement, après avoir utilisé l'inégalité de Young pour l'estimation (4.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\rho_1^{\frac12}u\|_2^2+\|\rho\|_2^2+\eta\int_0^t\|\nabla u\|_2^2\,ds\le c\int_0^t\|\rho_1^{\frac12}u\|_2^2\,ds+ \\ +c\int_0^t\left[\|f\|_q^2+\|\nabla u_1\|_2^2+\|\nabla\rho_1\|_q^2+\|\partial_t u_1\|_q^2+\|u_1\|_{2,2}^2\right]\|\rho\|_2^2\,ds.\end{aligned} \tag{4.7}$$

En tenant compte de l'hypothèse (4.1), nous pouvons déduire que $(4.7)_1$ peut être majoré

[7] Avec π_i est récupéré par le lemme de De Rham.

par

$$c\int_0^t h\left(\|\rho_1^{\frac{1}{2}}u\|_2^2+\|\rho\|_2^2\right),$$

où $h \in L^1(0,T)$. Donc le lemme de Gronwall achève le théorème 4.2. ■

5 Cas de coefficient de viscosité variable

Ici, on va étendre les résultats du paragraphe précédent au cas où le coefficient de viscosité dépendant de la densité. Nous allons démontrer un résultat d'existence de la solution faible pour le problème reproductif (1.1)-(1.5) où le coefficient de viscosité η dépend continûment de la densité ρ. Plus précisément, nous considérons l'équation (1.1), avec η une fonction dépendant de la densité, i.e., $\eta = \eta(\rho)$.

En se basant sur une situation physiquement raisonnable (voir remarque 3.13), on suppose que la fonction de viscosité η vérifie

$$\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \qquad \eta(r) \geq \eta_0 > 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}_+. \tag{5.1}$$

La solution faible dans ce cas est définie comme celle du cas de coefficient de viscosité η est constant, sauf la formulation (3.2) sera remplacée par

$$\int_\Omega \partial_t(\rho u).\psi\, dx + \int_\Omega (\rho u.u).\nabla\psi - \int_\Omega \eta(\rho)\,\mathbf{D}(u).\mathbf{D}(\psi)\, dx = \int_\Omega \rho f.\psi\, dx,$$

pour presque tout $t \in [0,T]$ et $\psi \in \mathcal{V}$. Donc nous avons le

Théorème 5.1. *On se place dans les hypothèses du théorème* **??** *et on suppose en outre que $\eta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, satisfaisant (5.1). Alors il existe une solution faible (ρ, u) du problème (1.1)-(1.5). De plus il existe une fonction $\pi \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$ tel que (ρ, u, π) soit solution du problème reproductif (1.1)-(1.5).*

Preuve. La preuve de ces résultats découle immédiatement de celle obtenue pour le cas de coefficient de viscosité constante. La nouvelle formulation du problème (1.1)-(1.5) permet d'avoir quelques changements au niveau des estimations *a priori* et passage à la limite. Plaçons nous donc dans le cadre du paragraphe 3, et considérons les fonctions ρ_m, ρ, u_m et u. Alors l'hypothèse (5.1) et l'estimation (3.6) permettent de conclure qu'il existe une constante $\eta_1 > 0$ tel que

$$\eta_0 \leq \eta(\rho_m) \leq \eta_1 \quad \text{dans} \quad Q. \tag{5.2}$$

L'estimation d'énergie (3.17) sera donc remplacée par

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho|u_m|^2\, dx + 2\int_\Omega \eta(\rho)|\mathbf{D}(u)|^2\, dx = \int_\Omega \rho f_m.u\, dx, \tag{5.3}$$

et, grâce à (5.2), l'estimation (3.18) reste encore valable. Par conséquent le processus d'existence et d'unicité de la solution approchée est identiquement le même que celui du paragraphe 3.

Par ailleurs, la nouvelle estimation d'énergie (5.3) permet d'écrire grâce à l'inégalité de Korn[8]

[8] Notons que l'inégalité de Korn permet de contrôler le tenseur $\mathbf{D}(u)$ par rapport à ∇u. En effet,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_m|u_m|^2\,dx + 2\eta_0 K_2^2\lambda_1\int_\Omega |u_m|^2\,dx \le \int_\Omega \rho_m f_m.u_m\,dx. \tag{5.4}$$

Donc, l'estimation (3.36) est encore valable. Nous déduisons encore l'estimation (3.38). Ce qui entraîne à partir de (5.2) que

$$\eta(\rho_m)\,\mathbf{D}(u_m) \quad \text{est borné dans} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)^4). \tag{5.5}$$

D'autre part, l'estimation (3.39) sera remplacée par

$$\eta_0\frac{d}{dt}\|\mathbf{D}(u_m)\|_2^2 + \alpha\|\partial_t u_m\|_2^2 \le \beta\|\partial_t u_m\|_2\left(\|f_m\|_2 + \|u_m\|_4\|\nabla u_m\|_4\right).$$

Il s'ensuit que le deuxième inégalité d'énergie (3.46) devient

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{D}u_m\|_2^2 + \|\partial_t u_m\|_2^2 \le c\left(\|f_m\|_2^2 + \|\mathbf{D}(u_m)\|_2^4\right).$$

Donc, les estimations qui en découlent dans le paragraphe 3.1, restent valable grâce à l'inégalité de Korn.

Finalement, d'après l'estimation (5.5), on peut donc extraire de $\eta(\rho_m)\,\mathbf{D}(u_m)$ une sous suite notée encore $\eta(\rho_m)\,\mathbf{D}(u_m)$ telles que

$$\eta(\rho_m)\,\mathbf{D}(u_m) \to \zeta \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)^4) \quad \text{faible}. \tag{5.6}$$

De plus, de (3.55) on a

$$\mathbf{D}(u_m) \to \mathbf{D}(u) \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)^4) \quad \text{forte}. \tag{5.7}$$

D'autre part, ρ est une solution faible du problème de transport

$$\partial_t\rho + u.\nabla\rho = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Alors on en déduit grâce au résultat de DiPerna et Lions [5] que

$$\rho \in \mathcal{C}([0,T];L^p(\Omega)) \quad \text{et} \quad \|\rho(t)\|_p = \|\rho_0\|_p \quad \forall p\in[1,+\infty[,\ \forall t\in[0,T],$$

donc

$$\|\rho_m(t)\|_p = \|\rho_{0m}\|_p \to \|\rho_0\|_p = \|\rho(t)\|_p \qquad \forall t\in[0,T].$$

Par conséquent, d'après (3.54) nous pouvons déduire[9] que par exemple

$$\rho_m \to \rho \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{forte},$$

en particulier, la convergence est p.p. dans Q.
Utilisant maintenant la continuité de η sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\eta(\rho_m) \to \eta(\rho) \quad \text{p.p. dans} \quad Q. \tag{5.8}$$

A partir des limites (5.6) et (5.7), on obtient à l'aide de (5.8)

$$\zeta = \eta(\rho)\,\mathbf{D}(u),$$

ce qui termine la preuve du théorème 5.1. ■

soit $1 < p < +\infty$, alors il existe une constante $K_p = K_p(\Omega)$ telle que $K_p\|v\|_{1,p} \le \|\mathbf{D}(v\|_p$, pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (Ω étant borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne), voir Nečas [14].

[9] Dans un espace uniformément convexe (comme $L^2(0,T;L^2(\Omega))$), la convergence faible et en norme entraînent une convergence forte, voir par exemple [3].

6 Conclusion

Cette étude nous a également permis de mettre en évidence une modéfication significative de la méthode de Galerkin. En effet, nous avons développé des nouvelles estimations permettant de surmonter la difficulté liée à la propriété de reproductivité, en se ramenant à un problème de point fixe à travers l'introduction d'un problème à valeurs initiales déjà étudié. Elles ont aussi permis d'aborder de façon assez claire le cas du coefficient de viscosité dépendant de la densité du fluide. Enfin, nous avons donné un critère simple permettant d'obtenir l'unicité de la solution faible.

Cette approche va être développée pour l'étude d'un modèle contenant une loi de comportement *non linéaire* par exemple loi de puissance.

Appendice

Preuve du lemme 3.10. Soient $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{-1,q}(\Omega)$, donc nous pouvons écrire que $v = v_0 + \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ où $v_i \in L^q(\Omega)$; et grâce aux injections de Sobolev, nous avons $u \in L^{p*}(\Omega)$, où $p*$ désigne l'exposant de Sobolev de p ($\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ si $p < n$, $p* \in [1, +\infty)$ si $p = n$ et $p* = +\infty$ si $p > n$.) Soit donc $\xi = uv_0 + \sum \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} - \sum v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$, alors $uv_i \in L^r(\Omega)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p*} + \frac{1}{q}$ et que $\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} \in W^{-1,r}(\Omega)$.
D'autre part $v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^s(\Omega)$ où $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et $uv_0 \in L^s(\Omega)$. Encore les injections de Sobolev permettent d'avoir en outre que $L^s(\Omega) \subset W^{-1,r}(\Omega)$ puisque $r \leq s*$, d'où $\xi \in W^{-1,r}(\Omega)$ et on a

$$\|\xi\|_{-1,r} \leq \|u\|_{1,p}\|v\|_{-1,q}.$$

Donc, si $v \in W^{1,q}(\Omega)$ alors on a $\xi = uv$, par conséquent, nous avons le lemme grâce à la densité de l'espace $W^{1,q}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$. ■

Remerciements. Nos remerciements vont à F. Guillén pour les discussions fructueuses qu'il a réservées au premier auteur pendant son séjour au Département des Equations Différentielles et Analyse Numérique de l'Université de Seville.

References

[1] S.N. Antontzev and A.V. Kazhikhov, *Mathematical Study of Flows of nonhomogeneous Fluids.* Lectures at the University of Novosibirsk, Novosibirsk USSR, 1973.

[2] S.N. Antontzev, A.V. Kazhikhov and V.N. Monakhov, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids.* North-Holland, Amsterdam, 1990.

[3] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théory et Applications.* Masson, Paris, 1983.

[4] G. De Rham, *Variétés Différentiables.* Hermann, Paris, 1960.

[5] R.J. DiPerna and P.L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces.* Invent. Math. **98** (1989) 511-547.

[6] E. Fernandez-Cara and F. Guillén, *The existence of nonhomogeneous viscous and incompressible flow in unbounded domains.* Comm. PDE. **17** (1992) 1253-1265.

[7] A.V. Kazhikhov, *Resolution of boundary value problems for nonhomogeneous viscous*

fluids. Doc. Acad. Nauk. **216** (1974) 1008-1010.

[8] U.J. Kim, *Weak solutions of an initial boundary value problem for an incompressible viscous fluid with non negative density.* SIAM J. Math. Anal. **18** (1987) 89-96.

[9] O.A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow.* Gordon and Breach, London, 1969.

[10] J.L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèms aux Limites Non Linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[11] J.L. Lions, *On some problems connected with Navier-Stokes equations in nonlinear evolution equations.* In : M.C. Crandall (Ed.), *Problems Connected with Navier Stokes Equations,* pp. 59-84. Academic Press, New York, 1978.

[12] P.L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol.1: Incompressible Models.* Oxford University Press, 1996.

[13] J.E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics.* Springer-Verlag, 3rd. ed., New York, 1992.

[14] J. Nečas, *Sur les normes équivalentes dans* $W_p^k(\Omega)$ *et sur la coercivité des formes formellement positives.* Les Press de l'Université de Montreal, 1966.

[15] H. Okamoto, *On the equations of non stationary stratified fluid motion: Uniqueness and existence of solution.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A Math. **30** (1984) 615-643.

[16] M. Padula, *An existence theorem for nonhomogeneous incompressible fluids.* Rend. Circ. Mat. Palermo **31** (1982) 119-124.

[17] M. Padula, *On the existence and uniqueness of nonhomogeneous motion in exterior domains.* Math. Z. **203** (1990) 581-604.

[18] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$. Ann. Math. Pura Appl. **146** (1987) 65-96.

[19] J. Simon, *Nonhomogeneous viscous incompressible fluid : Existence of velocity, density, and pressure.* SIAM J. Math. Anal. **21** (1990) 1093-1117.

[20] V.A. Solonnikov and O.A. Ladyzhenskaya, *Unique solvability of an initial and boundary problem for viscous incompressible nonhomogeneous fluids.* J. Soviet. Math. **9** (1978) 697-749.

[21] R. Temam, *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis.* North-Holland, Amesterdam, 1977.

[22] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1997.