

## Une méthode de la théorie d'extrapolation pour résoudre des équations différentielles à retard non homogènes

B. AMIR et L. MANIAR

### Abstract

The purpose of this paper is to use some techniques based on extrapolation theory developed by Nagel-Sinestrari [6], to prove the existence and the dependance continuous with respect the initial data of solution of some retarded differential equations.

### 1 Introduction

Le but de ce travail est de résoudre l'équation différentielle à retard non homogène suivante

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) &= Lx_t + f(t), \quad t \geq 0 \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{C} := C([-r, 0]; \mathbb{R}^n), \end{cases} \quad (1)$$

( $L$  étant un opérateur linéaire borné de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C([0, \infty[; \mathbb{R}^n)$ ), en utilisant des techniques se basant sur la théorie d'extrapolation introduite par Da Prato-Grisvard (cf. [2]) et Nagel (cf. [5], [6]).

Ces techniques consistent à associer à l'équation (1), dans l'espace

$$X = \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}$$

(muni de la norme  $\|\cdot\| = |\cdot| + \|\cdot\|_\infty$ ), le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t)(0) \\ u(t) \end{pmatrix} &= \mathcal{A}_L \begin{pmatrix} u(t)(0) \\ u(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0 \\ \begin{pmatrix} u(0)(0) \\ u(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathcal{C}; \end{cases} \quad (2)$$

où

$$\mathcal{A}_L = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & \frac{d}{d\tau} \end{pmatrix}, D(\mathcal{A}_L) = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix}, \varphi \in C^1 \right\}.$$

En posant

$$\begin{aligned} X_0 &= \overline{D(\mathcal{A}_L)} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in C \right\}, \end{aligned}$$

on remarque que  $X_0 \neq X$ , la méthode classique pour résoudre (2), autant que problème dans  $X_0$ , ne peut pas être appliquée car le terme de la nonhomogénéité du problème n'est pas forcément dans  $X_0$ . Les techniques d'extrapolation nous permettent de considérer le problème (2) dans un espace  $X_{-1}$  plus grand, qui est le complété de  $(X_0, \|\cdot\|_{-1})$  (où  $\|x\|_{-1} = \|(\lambda I - \mathcal{A}_L)^{-1}x\|$ ,  $\lambda \in \rho(\mathcal{A}_L)$ ), contenant  $X$  et tel que l'opérateur introduit soit générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe (cf. [1], [6], [7]).

On montre que la solution  $x$  de (1) dépend continument de la donnée initiale  $\varphi$ , et est donnée par

$$x(t) = \begin{cases} w(t)(0) & \text{si } t > 0 \\ \varphi(t) & \text{si } -r \leq t \leq 0, \end{cases}$$

où  $w(t)$  est telle que  $\begin{pmatrix} w(t)(0) \\ w(t) \end{pmatrix}$  est la solution faible du problème de Cauchy (2), et qu'inversement cette solution faible peut être obtenue à partir de la solution de l'équation (1). Sous des conditions sur  $\varphi$  et  $f$ , on montre que la solution  $x$  est la solution classique de l'équation (1).

## 2 Résolution de l'équation (1) par "extrapolation"

Pour des détails concernant la théorie d'extrapolation on peut voir [2], [5] et [6].

**Proposition 1** *L'opérateur  $\mathcal{A}_L$ , introduit dans le problème (2) est un opérateur de Hille-Yosida.*

**Preuve:** En effet  $\mathcal{A}_L = \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}$  où  $\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\tau} \end{pmatrix}$  et  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

est un opérateur de  $X$  dans  $X$  borné. Pour montrer que  $\mathcal{A}_L$  est un opérateur de Hille-Yosida, il suffit de montrer que  $\mathcal{A}_0$  est de Hille-Yosida (cf. [4]):

On montre pour tout  $\lambda > 0$ , moyennant une récurrence sur  $n$ , que pour tout  $\begin{pmatrix} c \\ g \end{pmatrix} \in X$

$$((\lambda I - \mathcal{A}_0)^{-1})^n \begin{pmatrix} c \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{c}{\lambda^n} \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où

$$\varphi_n(\theta) = c \exp(\lambda\theta) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \theta^k}{k! \lambda^{n-k}} + \int_0^\theta \int_{s_1}^0 \dots \int_{s_{n-1}}^0 \exp(\lambda(\theta-\tau)) g(\tau) d\tau ds_{n-1} \dots ds_1.$$

On a

$$\left\| ((\lambda I - \mathcal{A}_0)^{-1})^n \begin{pmatrix} c \\ g \end{pmatrix} \right\|_X \leq \frac{|c|}{\lambda^n} + |c| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \theta^k}{k! \lambda^{n-k}} + \|g\|_\infty \cdot I^n(\theta)$$

avec

$$I^n(\theta) = \int_0^\theta \int_{s_1}^0 \dots \int_{s_{n-1}}^0 \exp(\lambda(\theta-\tau)) d\tau ds_{n-1} \dots ds_1.$$

En calculant  $I^n(\theta)$  on trouve

$$I^n(\theta) = \exp(\lambda\theta) \left( \frac{1}{\lambda^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \theta^k}{k! \lambda^{n-k}} \right),$$

on a alors l'estimation

$$\left\| ((\lambda I - \mathcal{A}_0)^{-1})^n \begin{pmatrix} c \\ g \end{pmatrix} \right\|_X \leq \frac{2}{\lambda^n} (|c| + \|g\|_\infty) \blacksquare$$

La part  $\mathcal{A}_{L,0}$  de  $\mathcal{A}_L$  dans  $X_0$  est telle que

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_{L,0}) &= \left\{ \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in C^1 \text{ et } \varphi'(0) = L\varphi \right\} \text{ et} \\ \mathcal{A}_{L,0} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix} &= \mathcal{A}_L \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit  $(T(t))_{t>0}$  le semi-groupe solution de (1), son générateur  $A$  est

$$\begin{aligned} D(A) &= \{ \varphi \in C^1; \varphi(0) = L\varphi \} \text{ et} \\ A\varphi &= \varphi'. \end{aligned}$$

(cf. [3], lemme 1.2. p.194).

**Proposition 2**  $\mathcal{A}_{L,0}$  engendre dans  $X_0$  un  $C_0$ -semi-groupe  $(T(t))_{t>0}$  donné par

$$T(t) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T(t)\varphi)(0) \\ T(t)\varphi \end{pmatrix}.$$

**Preuve:** En effet  $\mathcal{A}_{L,0}$  engendre un  $C_0$ -semi-groupe dans  $X_0$  (cf. [4], thm 12.2.9 ). Soit  $(\mathcal{S}(t))_{t>0}$  le semi-groupe défini sur  $X_0$  par

$$\mathcal{S}(t) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T(t)\varphi)(0) \\ T(t)\varphi \end{pmatrix}$$

on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \left( \mathcal{S}(t) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix} \right) &= \lim_{t \searrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{t}((T(t)\varphi)(0) - \varphi(0)) \\ \frac{1}{t}(T(t)\varphi - \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'(0) \\ A\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme  $\varphi$  est dans  $D(A)$  alors  $\varphi'(0) = L\varphi$ , et par conséquent le générateur du semi-groupe  $(\mathcal{S}(t))_{t>0}$  est l'opérateur  $\begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & A \end{pmatrix}$  de domaine  $\left\{ \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix}; \varphi \in C^1 \text{ et } \varphi'(0) = L\varphi \right\}$  qui n'est autre que l'opérateur  $\mathcal{A}_{L,0}$ . Donc les semi-groupes  $(\mathcal{S}(t))_{t>0}$  et  $(T(t))_{t>0}$  coïncident. ■

Soit  $(T_{-1}(t))_{t>0}$  le  $C_0$ -semi-groupe d'extrapolation de  $(T(t))_{t>0}$  (cf. [6] proposition 1.3 ), on a le résultat suivant (cf. [6] thm 1.4):

**Proposition 3** Soit  $\mathcal{A}_{-1}$  le générateur infinitésimal de  $(T_{-1}(t))_{t>0}$ , on a:  
 (i)  $D(\mathcal{A}_{-1}) = (X_0, \|\cdot\|_{-1})$ .  
 (ii)  $\mathcal{A}_{-1}$  est le prolongement unique de  $\mathcal{A}_{L,0}$  dans  $X_0$ .

Le problème (2) s'écrit dans  $X_{-1}$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{U}(t) = \mathcal{A}_{-1} \mathcal{U}(t) + \mathcal{F}(t) , t \geq 0 \\ \mathcal{U}(0) = \Phi; \end{cases} \tag{3}$$

où  $\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} u(t)(0) \\ u(t) \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix}$  ( $\varphi \in C$ ).

Le lemme suivant est d'une utilité importante (cf. [6] )

**Lemme 4** Pour  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ , posons

$$(T_{-1} * \mathcal{F})(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s) \mathcal{F}(s) ds,$$

alors pour tout  $t \geq 0$ , les propriétés suivantes sont vérifiées

- (i)  $(T_{-1} * \mathcal{F})(t) \in X_0$ .
- (ii)  $\|(T_{-1} * \mathcal{F})(t)\| \leq M \exp(\omega t) \int_0^t \|\exp(-\omega s) \mathcal{F}(s)\| ds$ ,  $M$  ne dépend pas de  $f$  et de  $t$ , ( $\omega$  est tel que  $\|T(t)\| \leq m_0 \exp(\omega t)$ ,  $m_0 > 0$ ).

Comme on peut le voir dans la démonstration du théorème qui suit, la solution faible de (3) est aussi la solution faible de (2). Elle est donnée dans  $X^{-1}$ , par la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} w(t)(0) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T(t)\varphi)(0) \\ T(t)\varphi \end{pmatrix} + \int_0^t T^{-1}(t-s) \begin{pmatrix} f(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds, \quad \forall t \geq 0.$$

**Théorème 5** Pour tout  $\lambda > \omega$ , on a :

$$w(t) = T(t)\varphi + (\lambda I - A) \int_0^t T(t-s)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s)) ds, \quad \forall t \geq 0$$

où  $\Delta^{-1}(\lambda)$  est l'inverse de l'opérateur  $\Delta(\lambda)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  défini par

$$\Delta(\lambda)x = \lambda x - L(\exp(\lambda \cdot)x).$$

$w(t)$  vérifie

$$w(t)(\theta) = \begin{cases} \varphi(t+\theta) & \text{si } -r \leq t+\theta \leq 0 \\ w(t+\theta) & \text{si } t+\theta > 0, \end{cases}$$

de plus, on a l'estimation suivante:

$$|w(t)(0)| + \|w(t)\|_\infty \leq 2m_0 \exp(\omega t)(|\varphi(0)| + \|\varphi\|_\infty) + \int_0^t \exp(-\omega s) |f(s)| ds.$$

**Preuve:** Pour  $\lambda > \omega$ , il est aisé de voir que

$$(\lambda I - \mathcal{A}_L)^{-1} \begin{pmatrix} f(s) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^{-1}(\lambda) f(s) \\ \exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s) \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w(t)(0) \\ w(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (T(t)\varphi)(0) \\ T(t)\varphi \end{pmatrix} + \int_0^t T^{-1}(t-s)(\lambda I - \mathcal{A}_L) \begin{pmatrix} \Delta^{-1}(\lambda) f(s) \\ \exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} (T(t)\varphi)(0) \\ T(t)\varphi \end{pmatrix} + (\lambda I - \mathcal{A}_L) \int_0^t T(t-s) \begin{pmatrix} \Delta^{-1}(\lambda) f(s) \\ \exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} (T(t)\varphi)(0) \\ T(t)\varphi \end{pmatrix} + (\lambda I - \mathcal{A}_L) \left( \begin{array}{l} \int_0^t T(t-s)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s))(0) ds \\ \int_0^t T(t-s)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s)) ds \end{array} \right) \end{aligned}$$

Posons

$$h(t, \tau) = \int_0^t T(t-s)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s))(\tau) ds$$

et montrons que  $\begin{pmatrix} h(t, 0) \\ h(t, \tau) \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}_t)$  :

Le semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  solution de (1) est défini dans  $\mathcal{C}$  (cf. [3], p.194) par

$$(T(t)\varphi)(\tau) = \begin{cases} \varphi(0) + \int_0^{t+\tau} L(T(s)\varphi)ds & \text{si } t + \tau > 0 \\ \varphi(t + \tau) & \text{si } -\tau \leq t + \tau \leq 0. \end{cases}$$

En remplaçant dans  $h(t, \tau)$  on trouve :

$$h(t, \tau) = \begin{cases} \int_0^{t+\tau} \Delta^{-1}(\lambda)f(s)ds + \int_0^{t+\tau} \left( \int_0^{t+\tau-s} L(T(\sigma)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda)f(s)d\sigma) \right) ds \\ + \int_{t+\tau}^t \exp(\lambda + \tau - s) \Delta^{-1}(\lambda)f(s)ds & \text{si } t + \tau > 0 \\ \int_0^t \exp(\lambda + \tau - s) \Delta^{-1}(\lambda)f(s)ds & \text{si } t + \tau \leq 0; \end{cases}$$

et en calculant  $\frac{d}{d\tau} h(t, \tau)$  on obtient :

$$\frac{d}{d\tau} h(t, \tau) = \begin{cases} \int_0^{t+\tau} L(T(t + \tau - s)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda)f(s)))ds \\ + \lambda \int_{t+\tau}^t \exp(\lambda + \tau - s) \Delta^{-1}(\lambda)f(s)ds & \text{si } t + \tau > 0 \\ \lambda \int_0^t \exp(\lambda + \tau - s) \Delta^{-1}(\lambda)f(s)ds & \text{si } t + \tau \leq 0. \end{cases}$$

On conclut que  $h(t, \cdot)$  est continument dérivable et que

$$\frac{d}{d\tau} h(t, 0) = L \left( \int_0^t T(t-s)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda)f(s))ds \right) = Lh(t, \cdot).$$

La solution faible du problème (2) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w(t)(0) \\ w(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (T(t)\varphi)(0) \\ T(t)\varphi \end{pmatrix} + (\lambda I - \mathcal{A}_t) \begin{pmatrix} h(t, 0) \\ h(t, \cdot) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (T(t)\varphi)(0) + \lambda h(t, 0) - Lh(t, \cdot) \\ T(t)\varphi + \lambda h(t, \cdot) - \Lambda h(t, \cdot) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

par suite

$$w(t) = T(t)\varphi + (\lambda I - \Lambda) \int_0^t T(t-s)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda)f(s))ds.$$

De plus

$$\begin{aligned}
 w(t)(\tau) &= T(t)\varphi(\tau) + \lambda h(t, \tau) - \frac{d}{d\tau} h(t, \tau) \\
 &= \begin{cases} \varphi(0) + \int_0^{t+\tau} L(T(s)\varphi) ds + \lambda \int_0^{t+\tau} \Delta^{-1}(\lambda) f(s) ds \\ + \lambda \int_0^{t+\tau} \left( \int_0^{t+\tau-s} L(T(\sigma)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s) d\sigma) ds \right. \\ \left. - \int_0^{t+\tau} L(T(t+\tau-s)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s) ds \right) & \text{si } t+\tau > 0 \\ \varphi(t+\tau) & \text{si } -\tau \leq t+\tau \leq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} w(t+\tau)(0), & t+\tau > 0 \\ \varphi(t+\tau), & -\tau \leq t+\tau \leq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pour montrer l'estimation il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
 \|T(t)\| &= \sup_{\|\varphi(0)\| + \|\varphi\| \leq 1} (|(T(t)\varphi)(0)| + \|T(t)\varphi\|_{\infty}) \\
 &\leq 2m_0 \exp \omega t
 \end{aligned}$$

et d'utiliser la propriété (ii) du lemme 4 ■.

On remarque, de passage, que  $w(t)$  ne dépend pas de  $\lambda$  choisi supérieure à  $\omega$ .

**Théorème 6** Soit  $\varphi \in C$  et  $f \in C([0, \infty[, \mathbb{R}^n)$ , alors la solution unique  $x$  de l'équation (1) est donnée par

$$x(t) = \begin{cases} w(t)(0) & \text{si } t > 0 \\ \varphi(t) & \text{si } -\tau \leq t \leq 0. \end{cases}$$

où  $w(t)$  est la deuxième composante de la mild solution de (2).

Inversement, si  $x$  est la solution de (1), pour  $\varphi \in C$  et  $f \in C([0, \infty[, \mathbb{R}^n)$ , alors la fonction  $\begin{pmatrix} u(t)(0) \\ u(t) \end{pmatrix}$  (où  $u(t) = x_t$  pour tout  $t > 0$  et  $u(0) = \varphi$ ), est la solution faible du problème (2). De plus on a l'estimation

$$|x(t)| \leq M' \exp(\omega t) (\|\varphi\|_{\infty} + \int_0^t \exp(-\omega s) |f(s)| ds),$$

$M' > 0$  ne dépendant pas de  $t$ .

**Preuve:** Pour  $t > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} w(t)(0) &= \varphi(0) + \int_0^t L(T(s)\varphi)ds + \lambda \int_0^t \Delta^{-1}(\lambda)f(s)ds \\ &\quad + \lambda \int_0^t \left( \int_0^{t-s} L(T(\sigma)(\exp(\lambda \cdot)\Delta^{-1}(\lambda)f(s)d\sigma) \right) ds \\ &\quad - \int_0^t L(T(t-s)(\exp(\lambda \cdot)\Delta^{-1}(\lambda)f(s))ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w(t)(0) &= L(T(t)\varphi) + \lambda(\Delta^{-1}(\lambda)f(t)) + \lambda \int_0^t L(T(t-s)(\exp(\lambda \cdot)\Delta^{-1}(\lambda)f(s))ds \\ &\quad - L(\exp(\lambda \cdot)\Delta^{-1}(\lambda)f(t)) - \int_0^t \frac{d}{dt}L(T(t-s)(\exp(\lambda \cdot)\Delta^{-1}(\lambda)f(s))ds \\ &= \Delta^{-1}(\lambda)(\lambda I - L(\exp(\lambda \cdot)))f(t) + L(\lambda I - \frac{d}{dt}) \int_0^t T(t-s)(\exp(\lambda \cdot)\Delta^{-1}(\lambda)f(s)ds \\ &= Lw(t) + f(t). \end{aligned}$$

De plus, d'après la propriété de translation que vérifie  $w(t)$ , on a :

$$x_t(\tau) = \begin{cases} w(t+\tau) & , \quad t+\tau > 0 \\ \varphi(t+\tau)(0) & , \quad -\tau \leq t+\tau \leq 0. \end{cases}$$

On conclut, d'après le théorème 5, que  $x_t = w(t)$ .

Inversement on sait que (1) admet une solution unique (cf. [3], p.168). Soit  $x$  cette solution, comme la deuxième composante  $w(t)$  ( $t > 0$ ) de la solution faible de (2) vérifie (1), alors, d'après l'unicité,  $\begin{pmatrix} w(t)(0) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_t \end{pmatrix}$ . L'estimation découle du théorème 5. ■

**Proposition 7** Soit  $\varphi \in C^1([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ , si on suppose que  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$  tel que  $\varphi'(0) = L\varphi + f(0)$ , alors  $\begin{pmatrix} w(t)(0) \\ w(t) \end{pmatrix}$  est la solution classique du problème (2).

La démonstration de cette proposition repose sur le résultat suivant (cf. [6]):

**Lemme 8** Soit  $A : D(A) \subset U \rightarrow U$  un opérateur de Hille-Yosida ( $U$  étant un espace de Banach). Alors pour  $x \in D(A)$  et  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+; U)$  tels que  $Ax + f(0) \in D(A)$ , le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t) & , \quad t \geq 0 \\ u(0) = x, \end{cases}$$

admet une solution classique unique.

Dans notre cas, on a:  $\begin{pmatrix} f(s) \\ 0 \end{pmatrix} \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+; X)$  et

$$\mathcal{A}_L \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\varphi + f(0) \\ \varphi' \end{pmatrix} \in \overline{D(\mathcal{A}_L)}.$$

D'après le lemme précédent, le problème (2) admet une solution classique, cette solution coïncide avec la solution faible  $\begin{pmatrix} w(t)(0) \\ w(t) \end{pmatrix}$  ■

**Théorème 9** Soit  $\varphi \in C^1$  et  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ , alors la solution classique  $x$  de l'équation (1) est donnée par

$$(*) \quad x(t) = \begin{cases} w(t)(0) & , t > 0 \\ \varphi(t) & , -r \leq t \leq 0. \end{cases}$$

où  $w(t)$  est la deuxième composante de la solution faible de (2)

**Preuve:** D'après la proposition 7 la fonction  $t \mapsto w(t)(0)$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, \infty[$ , de plus

$$\begin{aligned} \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} (w(t)(0) - w(0)(0)) &= \lim_{t \searrow 0} \left( \frac{1}{t} \int_0^t L(T(s)\varphi) ds + \frac{\lambda}{t} \int_0^t \Delta^{-1}(\lambda) f(s) ds \right) \\ &+ \lim_{t \searrow 0} \frac{\lambda}{t} \int_0^t \left( \int_0^{t-s} L(T(\sigma)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s)) d\sigma \right) ds \\ &- \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t L(T(t-s)(\exp(\lambda \cdot) \Delta^{-1}(\lambda) f(s)) ds \\ &= L\varphi + f(0) \\ &= \lim_{t \searrow 0} \frac{d}{dt} w(t)(0), \end{aligned}$$

le théorème 6 et le fait que  $\varphi \in C^1$  nous permet de conclure que (1) admet une solution classique unique, et que cette solution est donnée par (\*) ■

## References

- [1] Amann, H. : Parabolic evolution equations in interpolation and extrapolation spaces, *J. Functional analysis* 78 (1988), 233-270.
- [2] Da Prato, G. and Grisvard, P. : On extrapolation spaces. *Rend. Accad. Naz. Lincei* 72 (1982), 330-332.
- [3] Hale, J.K. and Verduyn Lunel, S.M. : *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag (1993).
- [4] Hille, E. and Phillips, R.S. : *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. publ. 31. Providence R.I. (1957).
- [5] Nagel, R. : Sobolev spaces and semigroups. *Semesterbericht Funktionalanalysis Sommersemester* (1983), Tübingen, Germany.
- [6] Nagel, R. and Sinestrari, P. : Inhomogeneous Volterra integrodifferential equations for Hille-Yosida operators. *Dekker, Lect. Notes, Pure Appl. Math.* 150 (1994), 51-70.
- [7] Nickel, G. and Rhundi, A. : On the essential spectral radius of semigroups generated by perturbations of Hille-Yosida operators. Preprint 1995. Tübingen, Germany.
- [8] Pazy, A. : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Differential Equations*. Springer-Verlag (1983).