

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS DANS CERTAINS  
ESPACES DE DISTRIBUTIONS<sup>(\*)</sup>

To the memory of Gh. Mihoc and Gr.C. Moisil

Samuel Zaidman

Introduction. Ce papier est conçu comme un travail d'exposition dans lequel nous allons essayer de présenter certains des résultats dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels (principalement dans le sens de Kohn et Nirenberg [4]) qui étaient obtenus par nous dans le passé récent.

Nous considérons des opérateurs actionnant dans les espaces de Soboleff  $H^s(\mathbb{R}^n)$  ( $s$  étant un nombre réel) et aussi dans l'espace vectoriel  $H^\infty(\mathbb{R}^n)$  - l'intersection de tous les  $H^s$ . (Voir [1]).

Les sujets qu'on considère ici sont les suivants:

Majorations des opérateurs pseudo-différentiels moyennant le maximum asymptotique du symbole; extension du Lemme de Gohberg et son application; variante d'un Théorème de Kohn et Nirenberg; enfin, séries asymptotiques d'opérateurs pseudo-différentiels.

§1. Soit  $S(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  avec décroissance rapide à l'infini;  $S'(\mathbb{R}^n)$  - son espace dual, formé des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^n$ .

La transformation de Fourier

$$(1.1) \quad \tilde{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx, \quad u \in S(\mathbb{R}^n)$$

transforme  $S$  en soi-même; aussi, elle admet une extension à  $S'(\mathbb{R}^n)$ ; pour

(\*) Cette recherche était faite pendant que l'auteur recevait une subvention de la part du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada.

toute distribution  $T \in S'$ , la transformée de Fourier  $\tilde{T}$  - aussi appartenant à  $S'$ , est définie à travers la formule

$$(1.2) \quad \tilde{T}(\varphi) = T(\tilde{\varphi}), \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

L'espace de Soboleff  $H^s(\mathbb{R}^n)$  ( $s$  étant un nombre réel quelconque, même négatif!) est formé des distributions tempérées  $T$  dont la transformée de Fourier  $\tilde{T}$  est une fonction localement intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{T}(\xi)$ , telle que l'intégrale

$$(1.3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\tilde{T}(\xi)|^2 d\xi$$

soit finie.

On peut démontrer que  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est le complété hilbertien de l'espace  $S(\mathbb{R}^n)$  par rapport à la norme

$$(1.4) \quad \|u\|_{H^s} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in S$$

§2. Les opérateurs qu'on étudie ici sont associés à certaines classes de "symboles" - c'est-à-dire des fonctions à valeurs complexes jouissant de propriétés spéciales.

Premièrement on considère des fonctions mesurables  $a(x, \xi)$ , définies sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; on suppose que

$$(2.1) \quad a(x, \xi) = a(\infty, \xi) + a'(x, \xi)$$

où

$$(2.2) \quad a'(x, \xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \lambda} \tilde{a}'(\lambda, \xi) d\lambda.$$

où  $\tilde{a}'(\lambda, \xi)$  est mesurable aussi dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

$$(2.3) \quad |\tilde{a}'(\lambda, \xi)| \leq k(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

et aussi

$$(2.4) \quad |\tilde{a}'(\lambda, \xi) - \tilde{a}'(\lambda, \eta)| \leq k(\lambda) |\xi - \eta| (|\xi| + |\eta|)^{-1}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n$$

où

$$(2.5) \quad (1+|\lambda|^2)^{pk(\lambda)} \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

enfin, on suppose que

$$(2.6) \quad |a(\infty, \xi)| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

et

$$(2.7) \quad |a(\infty, \xi) - a(\infty, \eta)| \leq C |\xi - \eta| (|\xi| + |\eta|)^{-1}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

En correspondance à tels symboles  $a(x, \xi)$  on se donne deux opérateurs linéaires  $A(x, D)$  et  $\tilde{A}(x, D)$ , actionnant de  $S(\mathbb{R}^n)$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ , et précisément:  $A(x, D)u$  est la transformation de Fourier inverse (au sens de  $S'(\mathbb{R}^n)$ ) de la fonction intégrable

$$(2.8) \quad a(\infty, \xi) \tilde{u}(\xi) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{a}'(\xi - \eta, \xi) \tilde{u}(\eta) d\eta, \quad u \in S$$

donc c'est une fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}^n$ , convergente à zéro pour  $|x| \rightarrow \infty$ .

$\tilde{A}(x, D)u$  a une définition semblable, étant la transformation de Fourier inverse de la fonction intégrable

$$(2.9) \quad a(\infty, \xi) \tilde{u}(\xi) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{a}'(\xi - \eta, \eta) \tilde{u}(\eta) d\eta, \quad u \in S.$$

Il est facile de montrer que, pour tout nombre réel  $s$ , des inégalités

$$(2.10) \quad \|A(x, D)u\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{H^s}, \quad \|\tilde{A}(x, D)u\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{H^s}, \quad u \in S$$

sont vraies. Cela permet l'extension, par continuité, des deux opérateurs  $A$  et  $\tilde{A}$ , de  $S(\mathbb{R}^n)$  à tout  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . Si l'on conserve la même notation on aura que  $A \in L(H^s)$ ,  $\tilde{A} \in L(H^s)$ . Aussi, la différence  $A - \tilde{A}$  des deux opérateurs est un opérateur linéaire et continu de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ .

Ces résultats sont assez faciles à démontrer; plus compliquée, au contraire, est la démonstration (donnée dans [5]) de la suivante majoration fondamentale:

Soit  $a(x, \xi)$  un symbole et définissons un nombre attaché à ce symbole par

$$(2.11) \quad K = \overline{\lim}_{|\xi| \rightarrow \infty} \max_{x \in \mathbb{R}^n} |a(x, \xi)| \quad (*)$$

Alors, étant donné un nombre réel  $s$  et un nombre positif quelconque  $\varepsilon$ , on peut trouver une constante positive  $C_{\varepsilon, s}$ , de façon que l'inégalité

$$(2.12) \quad \|A(x, D)u\|_{H^s} \leq (K + \varepsilon) \|u\|_{H^s} + C_{\varepsilon, s} \|u\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}, \quad u \in S(\mathbb{R}^n)$$

soit vraie.

§3. Notre prochain sujet se réfère à une extension d'un bien connu "Lemme de Gohberg" - jouant un rôle de base dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels classiques (voir [1]) (voir aussi l'article fondamental de Hörmander [3] pour une utilisation implicite d'une extension similaire de ce Lemme, dans une classe différente de symboles et opérateurs associés). La catégorie de symbole qu'on prend maintenant en considération est très voisine à celle des symboles généralisés définis dans le très intéressant "Appendix" du travail [4]. Pour préciser, nos symboles dans ce § sont de nouveau des fonctions bornées, à valeurs complexes,  $a(x, \xi)$ , définies sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / \{0\}$ , et de la forme  $a(\infty, \xi) + a'(x, \xi)$  où  $a'(x, \xi) \rightarrow 0$  pour  $|x| \rightarrow \infty$ . Si  $\tilde{a}'(\lambda, \xi)$  représente la transformation de Fourier de  $a'(x, \xi)$  par rapport à  $x \in \mathbb{R}^n$  (dans le sens de  $S'$ ) elle est donnée par une fonction telle que

$$(3.1) \quad |\tilde{a}'(\lambda, \xi)| \leq k(\lambda), \quad \text{où } (1 + |\lambda|)k(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

ensuite, on suppose qu'il existe une fonction continue positive  $\varphi(t)$ , définie pour  $t \geq 0$ , telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$  et de façon que les majorations

$$(3.2) \quad |a(x, \xi) - a(x, \eta)| \leq (1 + |\xi - \eta|)\varphi(|\xi|), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n / \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$(3.3) \quad |\tilde{a}'(\lambda, \xi) - \tilde{a}'(\lambda, \eta)| \leq (1 + |\xi - \eta|)\varphi(|\xi|)k(\lambda), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n / \{0\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n$$

soient satisfaites.

---

(\*) Suprême asymptotique - dans la terminologie de [2] - 116-117.

La propriété exprimée par le Lemme de Gohberg s'applique (dans le sens qu'on a une preuve dans ce cas seulement) à l'opérateur  $A(x,D)$  qui, dans l'espace  $S(\mathbb{R}^n)$  peut-être défini aussi moyennant l'intégrale absolument convergente

$$(3.4) \quad A(x,D)u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} a(x,\xi) \tilde{u}(\xi) d\xi, \quad u \in S.$$

Définissons maintenant, étant donné un point  $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , deux nouveaux opérateurs dans  $S(\mathbb{R}^n)$ ,  $P = P_{x_0, \xi_0}$ ,  $Q = Q_{x_0, \xi_0}$  dont la définition est la suivante:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} Pu(x) &= |\xi_0|^{\frac{n}{4}} u((x-x_0) |\xi_0|^{\frac{1}{2}}) e^{ix \cdot \xi_0}, \\ Qv(x) &= |\xi_0|^{-\frac{n}{4}} v(x_0 + |\xi_0|^{-\frac{1}{2}} x) e^{-i(x_0 + |\xi_0|^{-\frac{1}{2}} x) \cdot \xi_0}. \end{aligned}$$

Ces opérateurs appliquent  $S$  en soi, comme on voit facilement et ils sont un l'inverse de l'autre; ils transforment aussi les fonctions continues bornées dans  $\mathbb{R}^n$  en elles-même, ce qui permet de définir l'opérateur  $QAPu$  pour chaque fonction  $u \in S$ . Finalement, les opérateurs  $P$  et  $Q$  sont isométriques dans le sens de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , c'est-à-dire

$$(3.6) \quad \|Pu\|_{L^2} = \|Qu\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}, \quad u \in S.$$

On peut maintenant formuler le résultat préliminaire suivant:

Considérons un symbole  $a(x,\xi)$  (vérifiant donc 3.1, 3.2<sup>(1)</sup>, 3.3), tel que  $\lim_{p \rightarrow \infty} a(x_0, \xi_p) = c_0$  existe, pour un  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et pour une suite  $(\xi_p) \subset \mathbb{R}^n$ , telle que  $|\xi_p| \rightarrow \infty$ . Alors, la limite ponctuelle

$$(3.7) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} Q_{x_0, \xi_p} A P_{x_0, \xi_p} u(x) = c_0 u(x), \quad u \in S(\mathbb{R}^n)$$

existe, uniformément sur les ensembles bornés de  $\mathbb{R}^n$ .

On démontre aussi (sans faire intervenir l'opérateur  $A$ !) que si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $(\xi_j) \subset \mathbb{R}^n$  avec  $|\xi_j| \rightarrow \infty$ , il résulte (1) avec la condition supplémentaire  $\sqrt{t} \varphi(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow +\infty$ .

$$(3.8) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|P_{x_0, \xi_j} u\|_{H^{-\varepsilon}} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{(où, comme plus haut, } \|v\|_{H^{-\varepsilon}} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-\varepsilon} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Maintenant, en vue de faire le passage au cas des opérateurs actionnant dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , ( $s$  étant tout nombre réel), on commence par définir une transformation  $I_s$ , de  $S$  dans  $S$ , moyennant la formule

$$(3.9) \quad I_s u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} (1+|\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}(\xi) d\xi, \quad u \in S$$

On peut l'étendre ensuite à une transformation de  $S'$  dans  $S'$  de la façon habituelle:

$$(3.10) \quad (I_s T)(\varphi) = T(I_s \varphi), \quad \forall T \in S', \quad \varphi \in S$$

et on voit que  $I_s$  est une isométrie (linéaire) de  $H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$  sur  $H^{\sigma-s}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ .

Maintenant, nous devons considérer les opérateurs  $I_{-s} P_{x_0, \xi_j} = P_{x_0, \xi_j}^s$ , de  $S$  dans  $S$ , et on remarque aussi que l'on a

$$(3.11) \quad \|P_{x_0, \xi_j}^s u\|_{H^s} = \|P_{x_0, \xi_j} u\|_{H^0} = \|u\|_{L^2}, \quad u \in S.$$

Ensuite, on définit d'une façon semblable les opérateurs  $Q_{x_0, \xi_j} I_s = Q_{x_0, \xi_j}^s$ ,  $S \rightarrow S$ ; de nouveau on voit que

$$(3.12) \quad \|Q_{x_0, \xi_j}^s u\|_{H^0} = \|I_s u\|_{H^0} = \|u\|_{H^s}, \quad u \in S.$$

Aussi, on a:  $P_{x_0, \xi_j}^s Q_{x_0, \xi_j}^s u = u$ ,  $\forall u \in S$ .

On en déduit que  $P_{x_0, \xi_j}^s$  s'étend à une isométrie,  $H^0 \rightarrow H^s$  tandis que  $Q_{x_0, \xi_j}^s$  s'étend à une isométrie,  $H^s \rightarrow H^0$ .

Finalement, si l'on suppose que la fonction  $k(\lambda)$  apparaissant dans (3.1) vérifie la condition supplémentaire

$$(3.13) \quad (1+|\lambda|^2)^{\frac{|s|}{2}} k(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

alors (voir [6], p. 530) il résulte que l'opérateur  $A(x, D)$  s'étend à un opérateur

linéaire continu de  $H^S$  dans  $H^S$ .

En tout on voit que les opérateurs  $Q_{x_0, \xi_j}^S A(x, D) P_{x_0, \xi_j}^S$  sont linéaires continus de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en soi-même.

A ce point, le résultat principal de [7] peut être formulé de la façon suivante:

Soit  $a(x, \xi)$  un symbole vérifiant (3.1), (3.2), (3.3), (3.13) et aussi  $\sqrt{t}\varphi(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ . Supposons que  $\lim_{p \rightarrow \infty} a(x_0, \xi_p) = c_0$  où  $|\xi_p| \rightarrow \infty$ . Alors, il existe une suite partielle  $(\xi_{p_k})_1^\infty$  de façon que la relation

$$(3.14) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} Q_{x_0, \xi_{p_k}}^S A(x, D) P_{x_0, \xi_{p_k}}^S u = c_0 u$$

soit vraie,  $\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , dans la convergence faible de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Un corollaire intéressant s'énonce maintenant de la façon suivante:

Dans les conditions précédentes sur le symbole  $a(x, \xi)$ , une majoration de la forme

$$(3.15) \quad \|A(x, D)u\|_{H^S} \leq C_{S, \varepsilon} \|u\|_{H^{S-\varepsilon}}, \quad \forall u \in S$$

est fautive pour tout  $\varepsilon > 0$ , à moins qu'on ait:  $\overline{\lim}_{|\xi| \rightarrow \infty} |a(x, \xi)| = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

§4. Dans cette section on explique un résultat qui est proche du "théorème A.3" dans [4].

La classe de symboles est du même type que dans la section précédente et l'opérateur considéré est de nouveau  $A(x, D)$ , comme transformation de  $L^2$  dans  $L^2$ .

Rappelons ici que, étant donnée une fonction convenable  $\psi(\xi)$ , de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ , l'opérateur de Friedrichs associé,  $\psi(D)$  est défini comme produit de trois opérateurs:  $\psi(D) = F^{-1} M_{\psi(\cdot)} F$ , où  $F, F^{-1}$  sont les transformations de Fourier directe et inverse (dans  $S'$ ) pendant que  $M_{\psi(\cdot)}$  est l'opérateur de multiplication par  $\psi(\xi)$ .

Si maintenant  $\varphi(t)$  est la fonction continue  $> 0$  qu'on a dans les définitions (3.2), (3.3), il résulte que  $\psi(\xi) = \sqrt{\varphi(|\xi|)}$  est continue bornée,  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ , et l'opérateur  $\varphi^{\frac{1}{2}}(|D|) = F^{-1} M_{\sqrt{\varphi(|\xi|)}} F$  est bien défini de  $L^2$  dans  $L^2$ .

Considérons maintenant, comme dans [4] le problème extrémal

$$(4.1) \quad \sup_{\tau \in \mathbb{R}^n} \varphi(|\tau|)(1+|\tau-\eta|)^{-1}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Vu que

$$(4.2) \quad \varphi(|\tau|)(1+|\tau-\eta|)^{-1} \leq \sup_{t \geq 0} \varphi(t), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n$$

le problème a une solution,  $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$ .

(Un exemple instructif est donné par la fonction  $\varphi(t) = (1+t)^{-1}$ ; on a dans ce cas que:  $\sup_{\tau \in \mathbb{R}^n} [(1+|\tau|)^{-1}(1+|\tau-\eta|)^{-1}] = (1+|\eta|)^{-1}$ ,  $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$ .

En effet, pour  $\tau = 0$  ou  $\tau = \eta$ , l'expression  $(1+|\tau|)^{-1}(1+|\tau-\eta|)^{-1}$  devient  $(1+|\eta|)^{-1}$ . Pour les autres  $\tau$  on a:  $(1+|\tau|)(1+|\tau-\eta|) \geq (1+|\eta|)$  vu que  $|\tau| - |\eta| + |\tau-\eta| + |\tau||\tau-\eta| \geq 0$ ,  $\forall \eta, \tau \in \mathbb{R}^n$ .

En général, si l'on note provisoirement avec  $\varphi_1^0(\eta)$  l'extremum  $\sup_{\tau \in \mathbb{R}^n} \varphi(|\tau|)(1+|\tau-\eta|)^{-1}$ , on voit que  $\varphi_1^0(\eta)$  est une fonction bornée mesurable sur  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $\varphi_1^0(\eta) \leq \sup_{t \geq 0} \varphi(t)$  et  $\varphi_1^0(\eta) \geq \varphi(|\eta|)$ . On a aussi que  $\varphi_1^0(\eta) \rightarrow 0$  pour  $|\eta| \rightarrow \infty$ ; étant donné en effet tout nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A(\varepsilon)$  tel que  $\varphi(|\tau|)(1+|\tau-\eta|)^{-1} \leq \varphi(|\tau|) < \varepsilon$  pour  $|\tau| > A$  et donc  $\varphi_1^0(\eta) \leq \max\{\varepsilon, \sup_{|\tau| \leq A} [\varphi(|\tau|)(1+|\tau-\eta|)^{-1}]\}$ . De plus, si  $|\tau| \leq A$  et  $|\eta| > A$  on a  $\varphi(|\tau|)(1+|\tau-\eta|)^{-1} \leq C(1+|\eta|-A)^{-1}$  ce qui permet d'achever la démonstration.

On peut établir aussi (conversation avec les professeurs A. Andreotti et S. Spagnolo) que la fonction  $\varphi_1^0(\eta)$  possède une symétrie sphérique et que, par conséquent, on peut définir une fonction  $\varphi_1(t)$ ,  $0 \leq t < \infty \rightarrow \mathbb{R}^+$  moyennant la formule  $\varphi_1(t) = \varphi_1^0(t\eta)$  pour  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\eta| = 1$ ; ainsi  $\varphi_1(|\xi|) = \varphi_1^0(\xi)$  et donc  $\sup_{\tau \in \mathbb{R}^n} [\varphi(|\tau|)(1+|\tau-\eta|)^{-1}] = \varphi_1(|\eta|)$ ; dans l'exemple précédent

$$\varphi_1(t) = (1+t)^{-1} = \varphi(t)!$$

Le résultat principal dans cette section (tel que prouvé dans le travail [9]) s'énonce de la façon suivante:

Si  $a(x, \xi)$  est un symbole vérifiant (3.1), (3.2), (3.3) où la fonction  $(1+|\lambda|^2)^{\frac{|s|}{2} + \frac{1}{4}} k(\lambda)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$  et  $A(x, D)$  est l'opérateur associé; alors, si  $u, v$  est une paire arbitraire de fonctions dans  $S(\mathbb{R}^n)$  ayant les supports à distance positive un de l'autre, l'inégalité

$$(4.3) \quad |(A(x, D)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}| \leq C \{ \|\varphi^{\frac{1}{2}}(|D|)u\|_{H^s} \|\varphi^{\frac{1}{2}}(|D|)v\|_{H^{-s}} + \|u\|_{H^{s-1}} \|v\|_{H^{-s}} \},$$

est satisfaite. (Plus précisément, si pour un  $\varepsilon > 0$  on a que  $\text{dist}(\text{supp}u, \text{supp}v) \geq \varepsilon$ , il existe une constante  $c_\varepsilon > 0$ , indépendante de tels  $u, v$ , de façon que la (4.3) soit vérifiée).

Dans la démonstration, qui est plutôt longue et délicate, nous faisons (en suivant de très près [4]) un appel ample à d'autres formules de représentation pour l'opérateur  $A(x, D)$ ; précisément (une formule de type "intégrale singulière"), ayant la forme suivante:

$$(4.4) \quad A(x, D)u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{b}(x, x-y) ((I-\Delta)^m u)(y) dy, \quad u \in S(\mathbb{R}^n)$$

où

$$(4.5) \quad \hat{b}(x, y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy \cdot \xi} a(x, \xi) (1+|\xi|^2)^{-m} d\xi, \quad m > n, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$$

Il résulte ensuite, si la distance réciproque entre les supports de  $u$  et  $v$  dans  $S$  est  $> \varepsilon > 0$ , et si  $J(x) \geq 0$  est une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , qui s'annule pour  $|x| \geq \varepsilon$  est vaut 1 dans un petit voisinage de l'origine, que l'on a

$$(4.6) \quad \int_{\mathbb{R}^n} A(x, D)u(x) \bar{v}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} Tw(x) \bar{v}(x) dx, \quad w = (I-\Delta)^m u$$

où

$$(4.7) \quad Tw = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (J(x-y)-1) \hat{b}(x, x-y) w(y) dy$$

une intégrale absolument convergente.

En continuant (voir [9]), un certain nombre d'inégalités nous permet d'arriver à la conclusion exprimée dans (4.3)).

§5. Dans cette section finale nous expliquerons un théorème d'existence pour des opérateurs qui se présentent comme somme d'une certaine série (asymptotique) d'opérateurs canoniques<sup>(\*)</sup>.

De tels résultats sont bien connus dans le cas des opérateurs attachés à des symboles très réguliers (voir [3], [4]). Dans la discussion suivante nous considérons des symboles avec régularité faible dans la variable  $\xi$ , et nous montrons qu'on peut quand-même prouver un résultat d'existence, moyennant une modification convenable de la méthode classique d'Hormander ([3], [4]).

La classe des symboles, ici notée avec  $G$  consiste des fonctions  $\sigma(x, \xi) = \sigma(\infty, \xi) + \sigma'(x, \xi)$ ,  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $\sigma(\infty, \xi)$  est bornée et mesurable, tandis que

$$(5.1) \quad \sigma'(x, \xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \tilde{\sigma}'(\eta, \xi) d\eta$$

$\tilde{\sigma}'(\eta, \xi)$  étant (partiellement) mesurable et vérifiant une majoration

$$(5.2) \quad |\tilde{\sigma}'(\eta, \xi)| \leq k(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n / \{0\}$$

où

$$(5.3) \quad (1 + |\eta|^2)^\ell k(\eta) \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Considérons aussi une fonction non-négative  $\zeta(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , qui s'annule pour  $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ , vaut 1 pour  $|\xi| \geq 1$ , et telle que  $0 \leq \zeta(\xi) \leq 1$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Alors pour tout  $t > 0$  et pour tout nombre réel  $r$ , on définit une fonction  $\zeta_r\left(\frac{\xi}{t}\right)$  qui = 0 pour  $|\xi| \leq \frac{t}{2}$  et =  $\zeta\left(\frac{\xi}{t}\right) |\xi|^r$  pour  $|\xi| \geq \frac{1}{2} t$ . On peut voir que l'on a l'inégalité

(\*) L'idée de cette recherche nous est venue en écoutant une très intéressante leçon du professeur F. Trèves (à Bressanone, Italie, été 1977) concernant ce sujet.

$$(5.4) \quad \left| \zeta_r \left( \frac{\xi}{t} \right) \right| \leq C(1+|\xi|^2)^{r/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On définit ensuite l'opérateur

$$(5.5) \quad \zeta_r \left( \frac{1}{t} D \right) = F^{-1} M \zeta_r \left( \frac{\xi}{t} \right) F.$$

On peut voir que

$$(5.6) \quad \left\| \zeta_r \left( \frac{1}{t} D \right) u \right\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^{s+r}}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad u \in S.$$

Par conséquent,  $\zeta_r \left( \frac{1}{t} D \right)$  s'étend à des opérateurs dans  $L(H^s, H^{s-r})$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , et aussi à une transformation de  $H^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{s \geq 0} H^s(\mathbb{R}^n)$  en soi-même.

Considérons aussi, pour tout symbole  $a(x, \xi) \in G$ , l'opérateur associé  $A(x, D)$  qui était défini dans le §2. On voit qu'il est dans  $L(H^s; H^s)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ , donc c'est une application de  $H^\infty(\mathbb{R}^n)$  en soi-même.

Nous appelons tout opérateur de la forme  $\zeta_r \left( \frac{1}{t} D \right) A(x, D)$ , opérateur canonique de degré  $r$  (de  $H^\infty$  dans  $H^\infty$  comme plus haut). On voit que

$$(5.7) \quad \left\| \zeta_r \left( \frac{1}{t} D \right) A(x, D) u \right\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^{s+r}}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad u \in H^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Maintenant nous allons définir la notion de représentation asymptotique d'un opérateur linéaire  $H^\infty \rightarrow H^\infty$  moyennant une suite d'opérateurs canoniques de degré  $r_j$ , où  $(r_j)_0^\infty$  est une suite de nombres réels strictement décroissante vers  $-\infty$ .

On a besoin d'une définition d'ordre et ordre vrai pour les opérateurs linéaires dans  $H^\infty$  (ensemble noté ici par  $\text{Lin}(H^\infty)$ ). Etant donné  $L \in \text{Lin}(H^\infty)$ , l'ordre de  $L$  - noté  $O(L)$  - est un ensemble de nombres réels dont la définition est

$$(5.8) \quad O(L) = \{r \in \mathbb{R}, \text{ tels que } \forall s \in \mathbb{R}, \exists C_s > 0, \text{ de façon que } \|Lu\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{H^{s+r}}, \forall u \in H^\infty\}.$$

Ensuite le vrai ordre est donné par la formule

$$(5.9) \quad t \cdot O(L) = \inf O(L)$$

(si  $\mathcal{O}(L) = \phi$  on pose  $t \cdot \mathcal{O}(L) = +\infty$  et si  $\mathcal{O}(L) = \mathbb{R}$ ,  $t \cdot \mathcal{O}(L) = -\infty$ ). On est en mesure maintenant de donner la:

Définition. Soit  $(r_j)_0^\infty \rightarrow -\infty$  une suite strictement décroissante de nombres réels et  $\{\zeta_{r_j} (\frac{1}{t_j} D) A_j(x, D)\}_0^\infty$  une suite d'opérateurs canoniques de degré  $r_j$ , correspondant à une suite de nombres réels positifs  $(t_j)_0^\infty$  et à une suite de symboles  $\{a_j(x, \xi)\}_0^\infty \subset G$ .

Un opérateur linéaire  $M$ ,  $H^\infty \rightarrow H^\infty$  admet une expansion asymptotique dans la série  $\sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{r_j} (\frac{1}{t_j} D) A_j(x, D)$  si l'on a, pour  $N = 0, 1, 2, \dots$

$$(5.10) \quad t \cdot \mathcal{O}[M - \sum_{j=0}^N \zeta_{r_j} (\frac{1}{t_j} D) A_j(x, D)] < r_N \quad (\text{inégalité stricte})$$

(Notation:  $M \sim \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{r_j} (\frac{1}{t_j} D) A_j(x, D)$ ).

Le résultat principal du travail [8] est maintenant énoncé dans le

Théorème. Soit donnée une suite de symboles  $\{a_j(x, \xi)\}_{j=0}^\infty$  dans  $G$  et une suite strictement décroissante de nombres réels  $\{r_j\}_0^\infty \rightarrow -\infty$ . Alors, il existe une suite d'opérateurs canoniques de degré  $r_j$ ,  $K_j$  et un opérateur linéaire  $P$  dans  $H^\infty$ , tel que

$$(5.11) \quad t \cdot \mathcal{O}(P) \leq r_0 \quad \text{et} \quad P \sim \sum_{j=0}^{\infty} K_j.$$

Pour la démonstration on renvoie à [8].

#### REFERENCES

- [1] Andreotti, A. "Operatori pseudo-differenziali" (Note di S. Spagnolo), Università degli Studi di Pisa (1966-67), pp. 1-171.
- [2] Friedrichs, K.O. "Pseudo-differential operators (An introduction)", Revised April 1970, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences.
- [3] Hörmander, L. "Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations" (Singular Integrals, Proc. Symp. Pure Math., vol. 10, Amer. Math. Soc., pp. 138-183.

- [4] Kohn, J.J. and Nirenberg, L. "An algebra of pseudo-differential operators", *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965), pp. 269-305.
- [5] Zaidman, S. "Some non-homogeneous symbols and associated pseudo-differential operators", *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, vol. 21 (1967), pp. 547-574.
- [6] Zaidman, S. "Certaines classes d'opérateurs pseudo-différentiels", *Journ. Math. Anal. Appl.*, vol. 30, 1970, pp. 522-563.
- [7] Zaidman, S. "Some inequalities for Kohn-Nirenberg pseudo-differential operators", *Ann. Sc. Math. Québec*, vol. 2, 1978, pp. 143-165.
- [8] Zaidman, S. "On asymptotic series of symbols and of general pseudo-differential operators", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, Vol. 63 (1980), pp. 231-246.
- [9] Zaidman, S. "Analogue d'un lemme de Kohn et Nirenberg", *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, vol. 71, pp. 249-255, 1984.
- [10] Zaidman, S. "Operatori pseudo-differenziali", *Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano*, vol. 37, pp. 183-190.

