LIBERTAS MATHEMATICA, VOL. 5, 1985

UNE MÉTHODE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE D'UN SYSTÈME CANONIQUE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Ilie Popescu

Les solutions périodiques de troisième sorte dans le problème de trois corps sont les solutions pour lesquelles les inclinaisons des orbites par rapport au plan fondamental de référence ne sont pas nulles et les excentricités des orbites sont petites.

Dans [P4] on a obtenu le système réduit d'èquations différentielles dans le problème des trois corps

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \; ; \; \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \; ; \quad i = 1,2,3,4 \tag{1}$$

en partant de la fonction génératrice F, les variables $x_i \in \{\Lambda, H, \Lambda', H'\}$ et les variables conjuguées $y_i \in \{1, g, 1', g'\}$.

Nous allons étudier les solutions périodiques du système (1) pour $\varepsilon = 0$.

Si ε tend vers *zéro, alors les corps* C_2 et C_3 *ont* les masses nulles et par conséquent le corp central C_1 coïncide avec le centre de poids des trois corps qui est l'origine du système fondamental de référence. Les mouvements des corps C_2 et C_3 par rapport avec C_1 *sont* dans ce cas des mouvements élliptiques; la fonction génératrice F se réduit à F_0

$$F_0 = \frac{k^2 m_1^2}{2} \left(\frac{M^3}{\Lambda^2} + \frac{M'^3}{\Lambda'^2} \right) \tag{2}$$

où k est la constante de l'attraction universelle. La fonction F_0 dépend uniquement des variables Λ et Λ' et le système d'équations (1) devient:

(3) $$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial y_i} \; ; \; \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F_0}{\partial x_i} \; ; \quad i=1,2,3,4.$$

En intégrant le système (3) on obtient

(4) $$\begin{aligned} x_i &= x_i^0, \quad x_i^0 \in \{\Lambda_0, H_0, \Lambda'_0, H'_0\} \\ y_i &= y_i^0, \quad y_i^0 \in \{nt+l_0, g_0, n't+l'_0, g'_0\} \end{aligned}$$

où on a noté

(5) $$n = K\, m_1^2 \frac{M^3}{\Lambda_0^2} \; ; \; n' = K\, m_1^2 \frac{M'^3}{\Lambda'^2_0}$$

n et n' sont les vitesses angulaires moyennes des deux mouvements.

Pour que la solution (4) du système (3) soit périodique il faut que les vitesses angulaires moyennes soient commensurables, c' est - à - dire

(6) $$\frac{n}{n'} = \frac{M^3}{\Lambda_0^2} \cdot \frac{\Lambda'^2_0}{M'^3} = \frac{p}{q}$$

où on peut supposer que p et q sont deux nombres entiers premiers entre eux et positifs

Pour $\varepsilon = 0$ on a $\Lambda_0 = M\sqrt{K\, m_1 a}$, $\Lambda'_0 = M'\sqrt{K\, m_1 a'}$ et la condition de commensurabilité a la forme

(7) $$\frac{n}{n'} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2}$$

ou

(7') $$\frac{a}{a'} = \left(\frac{q}{p}\right)^{2/3}$$

On suppose que $q < p$ ce qui signifie que la planète avec la grande demi-axe "a" est constamment intérieure à la planète avec la grande demi-axe "a'". Donc si on pose l'unique condition de commensurabilité des vitesses angulaires, alors le système (3) admet des solutions périodiques qui dépendent de 6 constantes arbitraires H_0, H'_0, l_0, l'_0, g_0, g'_0.

Par la suite on suppose que ε est petit, mais pas nul et nous allons étudier si le système (1) admet encore des solutions périodiques qui pour $\varepsilon = 0$ se réduisent aux solutions déja trouvées (4). Pour cela on va déterminer les constantes H_0, H'_0, l_0, l'_0, g_0, g'_0 tel que pour des petites valeurs de ε, les équations du système (1) admettent une solution périodique dont les valeurs initiales de variables sont

$$\begin{cases} x_i = x_i^0 + \phi_i(\varepsilon) \\ y_i = y_i^0 + \psi_i(\varepsilon) \end{cases} \qquad i=1,2,3,4 \tag{8}$$

ϕ_i et ψ_i étant des fonctions holomorphes qui s'annulent lorsque ε tend vers zéro. On peut choisir l'origine du temps tel que $l_0 = \psi_1 = 0$. Comme Λ_0 et Λ'_0 sont déterminées par l'intégration du système (3), il reste à déterminer les constantes H_0, H'_0, l'_0, g_0, g'_0. Pour cela on considère la valeur moyenne de la fonction perturbatrice F_1 (pour laquelle on a donné en [P4] et [P5] la forme analytique et le développement en série trigonométrique) pendant une période T du mouvement

$$R = \frac{1}{T}\int_0^T F_1 dt = \frac{d}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{d}} F_1 dt \tag{9}$$

où d est le plus grand diviseur commun de n et n'.

Considérons le développement en série de F_1

$$F_1 = \Sigma \frac{1}{a'}\,\Phi\left(\frac{a}{a'}\right) e^{\delta_1} e'^{\delta_2} [\cos(i+i')]^{\delta_3} \cos(n_1\ell + n_2\ell' + n_3 g + n_4 g) \tag{10}$$

où δ_1, δ_2, δ_3 sont des nombres positifs pairs ou nuls et n_1, n_2, n_3, n_4 sont des constantes entières. Si on remplace en F_1 les variables x_i, y_i par les solutions du système réduit x_i^0, y_i^0, alors F_1 devient une fonction périodique de temps, soit

$$F_1 = \Sigma\ \alpha(x_i^0,v_z)\cos[(n_1n+n_2n')t+n_1\ell_0+n_2\ell_0'+n_3g_0+n_4g_0'] \tag{11}$$

où α dépend de Λ_0, Λ_0', H_0, H_0' et de la constante des aires V_z.

La fonction F_1 contient des termes qui dépendent explicitement de temps et dont la valeur moyenne est nulle pendant une période T et des termes indépendants de temps qui donnent la fonction R. Donc R s'obtient en faisant la somme des termes pour lesquels

$$n_1n + n_2n' = 0 \tag{12}$$

et on obtient

$$R = \Sigma\ \alpha(x_i^0,V_z)\cos(n_1\ell_0 + n_2\ell_0' + n_3g_0 + n_4g_0') \tag{13}$$

Si dans la relation (12) on utilise la relation (6) on obtient $n_1p + n_2q = 0$, qui est vérifié si et seulement si n_1 et n_2 sont de la forme: $n_1 = sq$, $n_2 = -sp$ où s est un entier quelconque.

Finalement on obtient

$$R = \Sigma\ \alpha(x_i^0,V_z)\cos\omega_1 \tag{14}$$

où $\omega_1 = s(q\ell_0-p\ell_0') + n_3g_0 + n_4g_0'$ et $\alpha(x_i^0,V_z)$ est une constante.

Le système d'équations (1) aura une solution périodique pour des valeurs suffisamment petites de ε si les constantes H_0, H_0', ℓ_0, ℓ_0', g_0,g_0' sont choisies, tel que

$$\frac{\partial R}{\partial H_0} = \frac{\partial R}{\partial H_0'} = \frac{\partial R}{\partial \ell_0} = \frac{\partial R}{\partial \ell_0'} = \frac{\partial R}{\partial g_0} = \frac{\partial R}{\partial g_0'} = 0 \tag{15}$$

Les trois dernières équations s'écrivent

$$\frac{\partial R}{\partial \ell_0'} = \Sigma\ p\ \alpha(x_i^0, V_z)\sin(-sp\ell_0'+n_3g_0+n_4g_0') = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial g_0} = -\Sigma\ n_3\ \alpha(x_i^0, V_z)\sin(-sp\ell_0'+n_3g_0+n_4g_0') = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial g_0'} = -\Sigma\ n_4\ \alpha(x_i^0, V_z)\sin(-sp\ell_0'+n_3g_0+n_4g_0') = 0$$

Ces équations admettent les solutions suivantes: $g_0 = 0$ ou π; $g_0' = 0$ ou π; $p\ell_0' = 0$ ou π pour n'importe quelles valeurs de s, n_3, n_4. Il nous reste à étudier les équations

$$\frac{\partial R}{\partial H_0} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial H_0'} = 0 \tag{16}$$

Des deux intégrales premières des aires

$$\begin{cases} H_0 \sin i - H_0' \sin i' = 0 \\ H_0 \cos i - H_0' \cos i' - V_z = 0 \end{cases}$$

et des relations

$$e^2 = 1 - \left(\frac{H_0}{\Lambda_0}\right)^2; \quad e'^2 = 1 - \left(\frac{H_0'}{\Lambda_0'}\right)^2$$

on déduit $|\Lambda_0| > |H_0|$, $|\Lambda_0'| > |H_0'|$. Dans ces conditions, la fonction R admet au moins un maximum et un minimum à qoi correspondent des solutions periodiques.

Les équations (16) représentent un problème d'extremum lié, car les éléments élliptiques sont liés par les relations

$$\begin{cases} \Lambda_0 \sqrt{1-e^2} \sin i - \Lambda_0' \sqrt{1-e'^2} \sin i' = 0 \\ \Lambda_0 \sqrt{1-e^2} \cos i - \Lambda_0' \sqrt{1-e'^2} \cos i' - V_z = 0 \end{cases} \tag{17}$$

En utilisant la méthode de multiplicateurs de Lagrange, les variables liées e, e', i, i' pour lesquelles la fonction R admet un extremum vérifient le système:

$$
(18)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial R}{\partial e} - K_1\Lambda_0 \dfrac{e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} - K_2 \dfrac{e \sin i}{\sqrt{1-e^2}} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial R}{\partial e} - K_1\Lambda'_0 \dfrac{e' \cos i'}{\sqrt{1-e'^2}} + K_2 \dfrac{e' \sin i'}{\sqrt{1-e'^2}} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial R}{\partial i} - K_1\Lambda_0 \sqrt{1-e^2} \sin i + K_2\Lambda_0 \sqrt{1-e^2} \cos i = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial R}{\partial i'} - K_1\Lambda'_0 \sqrt{1-e'^2} \sin i' - K_2\Lambda'_0 \sqrt{1-e'^2} \cos i' = 0 \\[2ex]
\Lambda_0 \sqrt{1-e^2} \sin i - \Lambda'_0 \sqrt{1-e'^2} \sin i' = 0 \\[2ex]
\Lambda_0 \sqrt{1-e^2} \cos i + \Lambda'_0 \sqrt{1-e'^2} \cos i' - V_z = 0
\end{cases}
$$

où K_1 et K_2 sont les multiplicateurs de Lagrange. En faisant la différence entre la troisième et la quatrième équation et en utilisant les deux dernières on obtient

$$
(19)\qquad \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{\partial R}{\partial i'} + K_2 V_z = 0
$$

Mais comme $\frac{\partial R}{\partial i} - \frac{\partial R}{\partial i'} = 0$, il résulte $K_2 V_z = 0$. Il y a deux possibilités: soit que la constante des aires V_z est nulle, soit que le multiplicateur K_2 est nul. Dans le premier cas, le système formé avec les équations des aires admet pour les variables $\Lambda_0 \sqrt{1-e^2}$, $\Lambda'_0 \sqrt{1-e'^2}$ une solution non nulle si

$$
\begin{vmatrix} \cos i & \cos i' \\ \sin i & -\sin i' \end{vmatrix} = \sin(i+i') = 0
$$

c'est - à - dire si $i+i' = 0$ ou π. Cela nous indique un mouvement plan et, par conséquent, il n'y a pas des solutions périodiques de troisième sorte.

Pour avoir des solutions périodiques il faut que le multiplicateur K_2 soit nul et que les éléments élliptiques e, e', i, i' vérifient le système:

$$
(20)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial R}{\partial e} - K_1\Lambda_0 \dfrac{e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial R}{\partial e'} - K_1\Lambda_0' \dfrac{e' \cos i'}{\sqrt{1-e'^2}} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial R}{\partial i} - K_1\Lambda_0 \sqrt{1-e^2} \sin i = 0 \\[2ex]
\Lambda_0 \sqrt{1-e^2} \sin i - \Lambda_0' \sqrt{1-e'^2} \sin i' = 0 \\[2ex]
\Lambda_0 \sqrt{1-e^2} \cos i + \Lambda_0' \sqrt{1-e'^2} \cos i' - V_z = 0
\end{cases}
$$

Pour l'intégration numérique du système (20) on va utiliser les développements en séries de membres gauches, les propriétés de la fonction perturbatrice F_1 et les résultats de son développement numérique. Plusieurs constantes d'intégration sont à prévoir, qui dans le problème de trois corps doivent avoir des valeurs numériques bien précisées.

Nomenclature et symboles.

$2a, e, \ell, g, 2a', e', \ell', g'$ – les grandes axes, les excentricités, les anomalies moyennes, respectivement les longitudes des périhélies.

m_1, m_2, m_3 – les masses de trois corps.

K – la constante de l'attraction universelle.

$\mu = K(m_1+m_2)$; $\mu' = K(m_1+m_2+m_3)$

$\Lambda = \frac{m}{\varepsilon} \sqrt{\mu a}$; $\Lambda' = \frac{m'}{\varepsilon} \sqrt{\mu' a'}$

$H = \Lambda\sqrt{1-e^2}$; $H' = \Lambda' \sqrt{1-e'^2}$

$M = \dfrac{m_1 m_2}{\varepsilon(m_1+m_2)}$; $M' = \dfrac{m_3(m_1+m_2)}{\varepsilon(m_1+m_2+m_3)}$

Bibliographie.

[C1] Chazy, J., Mécanique Céleste, Paris, 1953.

[C2] Coculescu, N., "Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbtrice" (Thèse, Paris, 1895).

[G3] Grémillard, J., "Recherches sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps", Bull. Astronomique t. XXII, 1968.

[P3] Picard, E., Traité d'Analyse (tome III, Paris, 1928).

[P4] Popescu, I., "Solutions périodiques d'un système d'équations différentielles", Libertas Mathematica, Vol. III, 1983, Arlington, Texas.

[P5] Popescu, I., "La fonction perturbtrice d'un système canonique d'équations différentielles-calcul numérique", Libertas Mathematica, Vol. IV, 1984, Arlington, Texas.

[V6] Von Zeipel, "Recherches sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps", Société Royale des Sciences d'Upsala, 1904.