## UN THÉORÈME DE POINT FIXE. APPLICATION À LA COMPARAISON DES ÉQUATIONS DIFFÈRENTIELLES DANS LES ESPACES DE BANACH ORDONNÉS\*

## G. Isac

§ 1. Les théorèmes d'existence des solutions des équations différentielles dans les espaces de dimension infinie sont tout à fait différents que dans les espaces de dimension finie. Pour voir les particularités il faut consulter: [3], [6], [7], [10], [17], [19], [22], [23].

Le premier théorème d'existence des solutions des équations différentielles ayant le deuxième membre continu, dans les espaces de dimension infinie a été démontré par F. E. Browder [2], mais plus tard W. J. Knight [14]-[16] a prouvé que la démonstration proposée par F. E. Browder n'est pas correcte. L'erreur provient du fait que le théorème de convergence de Lebesgue n'est pas vraie pour des suites généralisées.

Récemment, Arino O., Gautier S. et Penot J.-P. dans l'ouvrage [1] ont prouvé le rôle important des théorèmes de point fixe pour les applications faiblement séquentiellement continues dans les espaces localement convexes métrisables, dans l'étude de l'existence des solutions des équations différentielles dans les espaces de Banach.

En relation directe avec l'ouvrage [1], nous démontrons un théorème de point fixe pour des applications monotones (pas nécessairement continues) d'un espace localement convexe ordonné métrisable et nous utilisons ce théorème pour obtenir un théorème de comparaison pour des équations différentielles dans un espace de Banach ordonné.

\*L'ouvrage a été supporté par le Ministère de la Défense Nationale du Canada - Subvention: 3610-629. §2. Nous supposons que  $E(\tau)$  est un espace vectoriel localement convexe qui a la topologie  $\tau$  definie par une famille  $\{\mid \mid_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$  de seminormes ayant les propriétés:

 $(0 \neq \alpha)(A \Rightarrow \alpha \in A)(A \Rightarrow \alpha \in A)(A \Rightarrow \alpha \in A)$ 

(ii)  $(\forall \alpha', \alpha'' \in A)(\exists \alpha \in A)(\forall x \in E)(|x|_{\alpha'}, |x|_{\dot{\alpha}''} \leq |x|_{\alpha}).$ 

Si l'espace  $E(\tau)$  est métrisable nous pouvons considérer que A est l'ensemble des nombres naturels N.

Nous disons qu'un sous-ensemble  $\mathbb{K} \subset E$  est un cone convexe si:

 $(c_1) \mathbb{K} + \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}$ 

 $(c_2) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}_+)(\lambda \mathbb{K} \subset \mathbb{K})$ 

Si le cône  $\mathbb K$  est fixé et  $\mathbb M \subseteq \mathbb E$  est un sous-ensemble nous disons que l'ensemble  $\mathbb M$  est saturé si:  $\mathbb M = (\mathbb M + \mathbb K) \cap (\mathbb M - \mathbb K)$ .

Soit  $\mathbb{K} \subset \mathbb{E}$  un cone convexe; nous disons que  $\mathbb{K}$  est normal (pour la topologie  $\tau$ ) s'il vérifie une des conditions équivalentes suivantes.

 $(n_1)$   $E(\tau)$  a un système fondamental de voisinages de zéro

formé d'ensembles saturés.

(n<sub>2</sub>) La topologie  $\tau$  peut être définie par une famille  $\left\{ \left| \begin{array}{c} \alpha \end{array} \right\}_{\alpha \in A} \right\}$  de semi-normes croissantes sur  $\mathbb{K}$ , c'est-àdire:  $(\forall x,y \in \mathbb{K})(x \leq y) \Rightarrow \left| x \right|_{\alpha} \leq \left| y \right|_{\alpha}$  pour tout  $\alpha \in A$ .

(n<sub>3</sub>) Si E' est le dual topologique de E et K' le polaire de l'ensemble (-K) par rapport à la dualité ⟨E,E'⟩, alors pour toute partie équicontinue A ⊂ E' il existe une partie équicontinue B ⊂ K' telle que A ⊂ B - B.

La normalité d'un cône convexe est une propriété remarquable et la grande partie des cônes utilisés sont des cônes normaux. Sur les cônes normaux nous recommandons les ouvrages [18], [21], [12].

Dans un espace localement convexe un cône convexe bien basé [12] est un cône normal.

Nous disons que le cône convéxe K C E est complètement régulier [resp. séquentiellement complètement régulier] si toute suite généralisée [resp. suite] monotone croissante d'éléments de K qui est topologiquement bornée est convergente.

Dans l'ouvrage [12] on démontre que dans un espace localement convexe séparé un cône convexe complet et bien basé est complètement régulier.

Aussi, dans tout espace localement convexe tout cône convexe normal et faiblement complet est complètement régulier [12]. Donc, dans tout espace  $L(\Omega\mu)$ ,  $\Omega \subseteq R^n$  (1 \infty) tout cône convexe normal et fermé est complètement régulier.

Soit  $E(\tau)$  un espace localement convexe et U(o) le filtre de tous les voisinages fermés et absolument convexes de zéro.

Nous disons que le cône convexe  $\mathbb{K} \subseteq E$  est <u>faiblement Schwartz</u> si pour tout voisinage  $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(o)$  il existe un voisinage  $\mathbb{V} \in \mathcal{U}(o)$ ,  $\mathbb{V} \subseteq \mathcal{U}$  tel que l'application canonique:  $\mathbb{K}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{V}}|\phi_{\mathbb{U}}(\mathbb{K})$ :  $\phi_{\mathbb{V}}(\mathbb{K}) \to E_{\mathbb{U}}$  est faiblement précompacte.

Nous avons désigné par  $\phi_V$  l'application canonique E  $\rightarrow$  E $_V$ . Le cône des fonctions surharmoniques positives sur un espace harmonique est faiblement Schwartz [42].

Dans l'ouvrage [12] nous avons démontré que dans un espace localement convexe tout cône convexe normal complet et faiblement Schwartz et complètement régulier.

Aussi dans un espace nucléaire complet, tout cone normal fermé est complètement régulier et séquentiellement complètement régulier.

Évidemment, tout cône complètement régulier est séquentiellement complètement régulier.

Dans un espace localement convexe séparé et semi-réflexif tout cône normal et fermé est séquentiellement complètement régulier [12].

§ 3. Soit  $E(\tau)$  un espace localement convexe et  $\mathbb{K} \subseteq E$  un cone convexe. Si le cône  $\mathbb{K}$  est saillant alors la relation  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{K}$  est une relation d'ordre sur l'espace E compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Soit  $A \subseteq E$  et  $f : A \rightarrow A$  un opérateur (pas necessairment continu).

Definition. Nous disons que l'opérateur f est (sm) - compact sur l'ensemble A si et seulement si, toute suite de la forme:

 $x_0 \ge f(x_1) \ge \cdots \ge f(x_n) \ge \cdots$ , où  $(\forall n \in \mathbb{N}) (x_n \in \mathbb{A})$ , contient une sous-suite convergente.

## Exemples

(1°) Si f(A) est séquentiellement compact alors l'opéræteur f : A → A est (sm)-compact.

(2°) Si f est monotone croissant, propre et s'il existe n tel que  $f^n(A)$  est séquentiellement compact alors  $f: A \to A$  est (sm)-compact.

(3°) Si f: A → A, f(A) borné et le cône IK est séquentiellement complètement régulier, alors f est (sm)-compact.

Théorème 1. Soit  $E(\tau)$  un espace localement convexe métrisable, ordonné par un cône  $\mathbb K$  supposé normal, fermé et saillant. Soit  $A \subseteq E$  un sous-ensemble fermé et  $f: A \to A$  un opérateur (sm)-compact et monotone croissant.

S'il esiste un élément  $x_0 \in A$  tel que  $f(x_0) \le x_0$ , alors f a un point fixe dans l'ensemble A.

Demonstration. Puisque l'espace  $E(\tau)$  est métrisable on sait que la topologie  $\tau$  est équivalente avec une topologie définie par une famille croissante dénombrable de semi-normes  $\{\mid \mid_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ .

Nous pouvons supposer que la famille  $\left\{ \left| \right. \right|_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie les propriétes (i), (ii) et comme le cône  $\mathbb{K}$  est normal nous pouvons supposer aussi que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la semi-norme  $\left| \right. \right|_n$  est monotone croissante sur le cône  $\mathbb{K}$ .

Dans ce cas, la topologie  $\tau$  est équivalente avec la topologie définie par la métrique:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x-y|_n}{1+|x-y|_n}; \quad \forall x,y \in E$$
 (1)

Nous considérons l'ensemble:  $A_0 = \{x \in A \mid f(x) \le x\}$  qui est non-vide parce que  $x_0 \in A_0$ .

Pour tout  $i \in N$  nous considérons la fonction:  $\phi(\cdot;i): A_0 \to R$  definie par:

$$\phi(u;i) = \sup \{d(f^{i}(v),f^{i}(w)) | v,w \in A_{0}, f^{i}(v) \leq f^{i}(w) \leq u \}$$
 (2)

La fonction  $\phi(\cdot;i)$  est bien définie, parce que pour tout  $u \in A_0$  on a:  $f(u) \leq u$  d'où  $f^i(u) \leq u$ .

Soit maintenant la fonction de deux variables (u;i).

La fonction  $\phi(u;i)$  est décroissante d'après i pour u fixé. En effet, il est suffisant de démontrer que:

$$\phi(u;i+1) \leq \phi(u;i) \tag{3}$$

Soit M l'ensemble formé par tous les couples (u,w) qui intervient dans le calcul du  $\phi(u;i)$  et  $M_1$  l'ensemble de tous les couples  $(v_1,w_1)$  qui intervient dans le calcul du  $\phi(u;i+1)$ .

Si 
$$(v_1,w_1) \in M_1$$
 alors  $f(v_1) \leq v_1$ ,  $f(w_1) \leq w_1$ 

Nous posons:  $v = f(v_1)$ ;  $w = f(w_1)$ . Alors  $v, w \in A_0$  parce que:

$$f(v) = f(f(v_1)) \le f(v_1) = v$$
  
 $f(w) = f(f(w_1)) \le f(w_1) = w$ 

Nous avons aussi les relations suivantes:

$$f^{i+1}(v_1) = f^{i}(f(v_1)) = f^{i}(v)$$
  
 $f^{i+1}(w_1) = f^{i}(f(w_1)) = f^{i}(w).$ 

Donc, si  $(v_1, w_1) \in M_1$  alors il existe  $(v, w) \in M$  tel que:  $d(f^{i+1}(v_1), f^{i+1}(w_1)) = d(f^i(v), f^i(w))$ 

d'où il résulte la relation (3).

Nous pouvons affirmer maintenant qu'il existe  $\lim_{i\to\infty} \phi(u;i)$  et donc nous pouvons définir:

$$\phi(u) = \lim_{i \to \infty} \phi(u;i); \quad \forall \quad u \in A_0.$$
 (4)

Nous demontrons maintenant que l'hypothèse que f est (sm)-compact implique la relation:

$$\inf_{\substack{\mathbf{u} \leq \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \in A_0}} \phi(\mathbf{u}) = 0; \quad \forall \quad \mathbf{y} \in A_0$$
 (5)

En effet, on suppose que la relation (5) n'est pas vraie, donc: (3 y  $_0 \in A_0$ ) (3  $\beta_0 > 0$ ,  $\beta_0 \in R$ ) (7 u  $\in A_0$ , u  $\leq$  y  $_0$ ) (7 i  $\in$  N) (\$\psi(u;i) > \beta\_0\$)

Dans ce cas on peut construire la suite:

$$y_0 \ge f^2(v_1) \ge f^2(w_1) \ge f^4(v_2) \ge f^4(w_2) \ge \cdots$$

$$\ge f^{2s}(v_s) \ge f^{2s}(w_s) \ge \cdots \quad \text{où} \quad v_s, w_s \in A_0$$
(6)

telle que:

$$d(f^{2s}(v_s), f^{2s}(w_s)) > \beta_0; \forall s$$
 (7)

La suite (6) n'a pas de sous-suites convergentes. En effet, nous avons les relations suivantes:

$$f^{2s}(v_s) - f^{2(s+k)}(v_{s+k}) \ge f^{2s}(v_s) - f^{2s}(w_s) \ge 0, \forall s,$$

$$\forall k = 1, 2, ... (8)$$

$$f^{2s}(w_s) - f^{2(s+k)}(w_{s+k}) \ge f^{2(s+1)}(v_{s+1}) - f^{2(s+1)}(w_{s+1}) \ge 0,$$
 $\forall s, \forall k = 1, 2, ... (9)$ 

Parce que: 
$$f^{2(s+k)}(v_{s+k}) \le f^{2s}(w_s)$$
 pour tout s et k  $f^{2s}(w_s) \ge f^{2(s+1)}(v_{s+1});$   $f^{2(s+k)}(w_{s+k}) \le f^{2(s+1)}(w_{s+1})$ 

pour tout s et k = 1,2,... ce qui donne:

$$\begin{split} f^{2s}(w_s) - f^{2(s+k)}(w_{s+k}) &\geq f^{2(s+1)}(v_{s+1}) - f^{2(s+k)}(w_{s+k}) \\ &\geq f^{2(s+1)}(v_{s+1}) - f^{2(s+1)}(w_{s+1}). \end{split}$$

Donc les relations (8) et (9) sont vraies.

Mais la relation (7) implique: 
$$f^{2s}(v_s) - f^{2s}(w_s) > 0$$
 et 
$$f^{2(s+1)}(v_{s+1}) - f^{2(s+1)}(w_{s+1}) > 0$$
 quel que soit  $s \in \mathbb{N}$ .

Puisque la famille de semi-normes  $\{ \mid \mid_n \}_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la propriété (i) et pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  la semi-norme  $\mid \mid_n$  est monotone croissante sur le cône  $\mathbb{K}$ , il résulte qu'il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  pour chaque  $s \in \mathbb{N}$ , tels que:

$$|f^{2s}(v_s) - f^{2(s+k)}(v_{s+k})|_{n_1} \ge |f^{2s}(v_s) - f^{2s}(w_s)|_{n_1} > 0;$$
  
 $\forall k = 1,2,...$ 

et

$$|f^{2s}(s_w) - f^{2(s+1)}(w_{s+k})|_{n_2} \ge |f^{2(s+1)}(v_{s+1}) - f^{2(s+1)}(w_{s+1})|_{n_2} > 0;$$
 $\forall k = 1, 2, ...$ 

Comme chaque sous-suite de la suite (6) contient ou une infinité de termes de la forme  $f^{2s}k(v_{s_k})$ , ou une infinité de termes de la forme  $f^{2s}k(w_{s_k})$  ou  $\{s_k\}$  est une sous-suite de N, il résulte que chaque sous-suite de la suite (6) n'est pas une suite de Cauchy, donc n'est pas convergente. Ici nous observons aussi que les sous-suites  $\{f^{2s}k(v_{s_k})\}$ ,  $\{f^{2s}k(w_{s_k})\}$  à cause de la relation (7) ne sont pas constantes.

Donc nous avons obtenu que la suite (6) n'a pas de soussuites convergentes. Mais cette affirmation est en contradiction avec l'hypothèse que f est un opérateur (sm)-compact parce que  $f^{2s-1}(v_s), f^{2s-1}(w_s) \in A_0$  quel que soit  $s \in N$ .

Nous pouvons donc maintenant affirmer que la relation (5) est vraie.

Utilisant la relation (5), l'élément  $x_0 \in A_0$ , la monotonie de f et le fait que f est (sm)-compact nous pouvons construire une suite de la forme:

$$x_0 \ge f(x_1) \ge f^2(x_2) \ge \cdots \ge f^n(x_n) \ge \cdots$$
 (10)

qui a les propriétés suivantes:

$$\phi(f^{i}(x_{i})) < \frac{1}{i}; x_{i} \in A_{0}; i = 1,2,...$$
 (11)

$$\left\{\mathbf{f}^{n}(\mathbf{x}_{n})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$
 est convergente vers un élément  $\mathbf{y}\in\mathbf{A}.$  (12)

Pour obtenir la suite (10) nous utilisons aussi le fait que vérifie la propriété:

$$\mathbf{u}_{1} \leq \mathbf{u}_{2} \Rightarrow \phi(\mathbf{u}_{1}) \leq \phi(\mathbf{u}_{2}). \tag{13}$$

La relation:  $f^{i}(x_{i}) \geq y$  implique,  $f^{i+1}(x_{i}) \geq f(y)$  et comme  $x_{i} \geq f(x_{i})$  implique  $f^{i}(x_{i}) \geq f^{i+1}(x_{i})$  on obtient que  $f^{i}(x_{i}) \geq f(y)$  pour tout  $i \in N$  ce qui donne  $y \geq f(y)$  c'est-àdire,  $y \in A_{0}$ .

Nous observons que pour tout i et m nous avons:

$$f^{i}(x_{i}) \ge f^{i+m}(x_{i+m}) \ge y \ge f(y) \ge f^{i+m}(y).$$

De la relation (11) nous obtenons:

$$\overline{\lim}_{m \to \infty} d(f^{i+m}(x_{i+m}), f^{i+m}(y)) \le \frac{1}{i} < \frac{1}{i-1}; \quad i = 2, 3, \dots$$
 (14)

Donc il existe m tel que:

$$d(f^{i+m}(x_{i+m}), f^{i+m}(y)) < \frac{1}{i-1}.$$

Tenant compte de la définition de la distance d nous obtenons pour n la relation:

$$2^{-n} \frac{\left|f^{i+m}(x_{i+m}) - f^{i+m}(y)\right|_{n}}{1 + \left|f^{i+m}(x_{i+m}) - f^{i+m}(y)\right|_{n}} < \frac{1}{i-1}$$

et d'après un calcul élémentaire nous obtenons pour tout n tel que  $i-1>2^n$ :

$$|f^{i+m}(x_{i+m}) - f^{i+m}(y)|_n < \frac{2^n}{i-1-2^n}; i = 2,3,...$$

Pour n donné, on prend i tel que  $i-1>2^n$ ; alors il existe m tel que:

$$|f^{i+m}(x_{i+m}) - f^{i+m}(y)|_n < \frac{2^n}{i-1-2^n}.$$
 (15)

Puisque:  $0 \le y - f(y) \le f^{i+m}(x_{i+m}) - f^{i+m}(y)$  et les seminormes  $\{|\ |_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones croissantes sur le cône IK nous obtenons que pour n donné et  $i \to \infty$   $(i-1>2^n)$  si nous retenons l'indice m pour lequel nous avons la relation (15) nous obtenons:

$$0 \le |y - f(y)|_n \le |f^{i+m}(x_{i+m}) - f^{i+m}(y)|_n \le \frac{2^n}{1 - 1 - 2^n}$$

Alors quand  $i \to \infty$  nous obtenons:  $|y - f(y)|_n = 0$  et si nous faisons le même raisonnement pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  nous obtenons:  $(\forall n \in \mathbb{N}) (|y - f(y)|_n = 0)$  et comme la famille de seminormes  $\{|\ |_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation (i) il résulte que y - f(y) = 0 et y est un point fixe pour f dans l'ensemble A.

Corollaire 1. Soit  $E(\tau)$  un espace localement convexe métrisable ordonné par un cône normal fermé et saillant IK,  $A \subseteq E$  un ensemble fermé faiblement séquentillement compact et  $f: A \to A$  un opérateur monotone croissant (pas nécessairement continu). S'il existe  $\mathbf{x}_0 \in A$  tel que  $f(\mathbf{x}_0) \leq \mathbf{x}_0$  alors f a un point fixe dans l'ensemble A.

Démonstration. Il est suffisant de prouver que f est (sm)-compact. En effet pour toute suite de la forme:

(\*) 
$$x_0 \ge f(x_1) \ge f(x_2) \ge \cdots \ge f(x_n) \ge \cdots$$

il existe une sous-suite  $\{f(x_n)\}$  faiblement convergente et comme le cône IK est normal le théorème de convergence [Th. 3.4, p. 91 [18]] implique que la suite  $\{f(x_n)\}$  est  $\tau$ -convergente vers la même limite.

Corollaire 2. Soit  $E(\tau)$  un espace localement convexe métrisable ordonné par un cone normal, fermé et saillant.

On suppose que le cône IK est séquentiellement complètement régulier.

Soit  $f: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$  un opérateur monotone croissant et forcé (f(0) > 0).

S'il existe  $x_0 \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x_0) \le x_0$  alors f a un point fixe  $x^* \in \mathbb{K}$ ,  $x^* \ne 0$ .

§ 4. Nous utilisons le théorème suivant démontré dans l'ouvrage [1] par Arino O., Gauthier S. et Penot J.-P.

Théorème. Soit  $E(\tau)$  un espace localement convexe métrisable et  $C \subseteq E$  un sous-ensemble convexe et faiblement compact.

Si f: C  $\rightarrow$  C est une application faiblement séquentiellement continue, alors elle a un point fixe dans l'ensemble C.

Pour les notions de: fonction absolument continue, intégrale de Pettis, intégrale de Bochner et leurs propriétés nous avons utilisé les ouvrages: [1], [20], et pour certains résultats sur la mesurabilité dans les espaces de Banach nous avons utilisé l'ouvrage [8].

Si  $(X,\tau)$  est un espace mesurable et E un espace de Banach, nous disons que la fonction  $f: X \to E$  est scalairement mesurable si et seulement si, pour tout  $x^* \in E^*$  la fonction  $x^*$  of est mesurable sur  $(X,\tau)$ , et nous disons que f est fortement mesurable si et seulement si, f est scalairement mesurable et il existe un sous-espace séparable  $E_0 \subseteq E$  tel que  $f^{-1}(E \setminus E_0)$  est négligeable.

Nous disons aussi que les fonctions f,g:  $X \to E$  sont faiblement équivalentes si et seulement si, pour tout  $x^* \in E^*$  on a:  $x^* \circ g = x^* \circ f$  p.p.t.

Soit  $B = \{x \in E | \|x_0 - x\| \le r\}$ ,  $I = [0,a] \subseteq \mathbb{R}$  et  $f : I \times B \rightarrow E$ .

Nous considérons X = I comme espace mesurable par rapport à la mesure ds de Lebesgue.

Nous disons que la fonction x(t) est une solution du problème:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t))$$

$$x(0) - x_0$$
(16)

si et seulement si, il existe  $J = [0,b] \subset I$  tel que:

 $(s_1)$ :  $x: J \to B$  est une fonction absolument continue  $(s_2)$ :  $x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(s) ds$  où  $\dot{x}$  est fortement intégrable et faiblement équivalente avec  $f(\cdot, x(\cdot))$ .

La fonction x est une <u>pseudo-solution</u> au sens de Knight [15] du problème (16) si et seulement si, x est une fonction absolument continue et pour tout  $x^* \in E^*$  il exists un ensemble négligeable  $N \subseteq J$  (qui dépend de  $x^*$ ) tel que  $x^*$ ox a come dérivée la fonction  $x^*(f(t,x(t)))$  pour tout  $t \in J \setminus N$ .

On sait que la fonction  $x:J\to B$  est une pseudo-solution si et seulement si,  $f(\cdot,x(\cdot))$  est scalairement intégrable et x vérifie l'équation:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds; \quad \forall t \in J.$$
 (17)

où l'intégrale est l'intégrale de Pettis.

Evidemment, si  $\times$  est une solution du problème (16) alors elle est une pseudo-solution.

Théorème 2. Soit E un espace de Banach ordonné par un cône convexe  $\mathbb K$  normal, saillant et fermé.

On suppose que pour les fonctions:  $f_1$ ,  $f_2$ :  $I \times B \to E$ , où I = [0,a] et  $B = \{x \in E | \|x - x_0\| \le r\}$ , les hypothèses suivantes sont vérifiées.

- (1°) Pour tout  $t \in I \setminus N$  (où  $N \subset I$  est un ensemble négligeable) les applications:  $f_{1t} = f_1(t, \cdot);$   $f_{2t} = f_2(t, \cdot)$  sont continues par rapport à la topologie faible sur E et B.
- (2°) Pour tout  $x \in B$ ,  $f_1(\cdot,x)$ ;  $f_2(\cdot,x)$  sont scalairement mesurables sur I.

- (3°)  $f_2((I\N) \times B) \subset f_1((I\N) \times B)$  et  $f_1((I\N) \times B)$  est faiblement relativement compact.
- (4°)  $f_0(t,x) \leq f_1(t,x)$ ;  $\forall t \in I \setminus W$ ;  $\forall x \in B$ .
- (5°)  $x \le y \Rightarrow f_2(t,x) \le f_2(t,y); \forall x,y \in B.$  Alors il existe: un intervalle  $J = [0,b] \subset I$ , b > 0, une solution  $x_i$  du problème:

$$(c_1): \dot{x}(t) = f_1(t,x(t))$$
  
  $x(0) = x_0$ 

et une solution y: du problème:

$$(c_2)$$
:  $\dot{x}(t) = f_2(t,x(t))$   
 $x(0) = x_0$   
 $telles\ que$ :  $y_*(t) \le x_*(t)$ ;  $\forall\ t \in J$ .

Demonstration. De l'ouvrage [1] on sait que dans les hypothèses précisées les fonctions,  $g_1(t) = f_1(t,x(t))$ ,  $g_2(t) = f_2(t,x(t))$  sont scalairement mesurables et que chaque pseudo-solution de l'équation  $(c_1)$  où  $(c_2)$  est une solution.

Nous pouvons modifier les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  par des valeurs constantes pour avoir l'hypothèse (3°) sur l'ensemble I×B et l'hypothèse (4°) sur l'ensemble I.

Soit  $D = \overline{\operatorname{co}(\overline{f_1(I \times B)}^{\sigma})}$  où  $\overline{f_1(I \times B)}^{\sigma}$  est la fermeture faible de l'ensemble  $f_1(I \times B)$ .

Le théorème de Krein [21] implique que l'ensemble D est faiblement compact, donc borné. Il existe alors M > 0 tel que:  $(\forall \ x \in D) \ (\|x\| \le M)$  et nous posons: J = [0,b] où b = min(a, $\frac{r}{M}$ ).

Puisque le cône IK est normal par rapport à la topologie  $\tau$ , on peut prouver qu'il est normal aussi par rapport à la topologie faible  $\sigma$  -  $\langle E,E^* \rangle$ .

Nous considérons sur l'espace E la topologie faible et sur  ${\tt E}^{\tt J}$  la topologie produit. Dans ce cas nous savons que le cône  ${\tt IK}^{\tt J}$  est un cône normal sur l'espace  ${\tt E}^{\tt J}$ .

Si pour tout  $t \in J$  nous posons:  $D_t = x_0 + t \cdot D$  nous savons que  $D_t \subset B$  et  $P = \prod_{t \in J} D_t$  est un sous-ensemble convexe compact de l'espace  $E^J$ .

L'ensemble:  $Q = \{x \in E^J | \forall s, t \in J, |x(s) - x(t)| \le M | t - s| \}$  $C E^J$  est convexe et faiblement fermé et donc c'est un ensemble convexe et fermé dans l'espace  $E^J$ .

Si y est la fonction:  $y(t) = x_0 + t \cdot f(0, x_0)$  nous avons que  $y \in P \cap Q$  et donc  $P \cap Q$  est un sous-ensemble convexe, compact et non-vide de l'espace  $E^J$ . Nous considérons maintenant les opérateurs:

$$(T_1y)(t) = x_0 + \int_0^t f_1(s,y(s)ds, (T_2y)(t) = x_0 + \int_0^t f_2(s,y(s)ds)$$

où l'intégrale est l'intégrale de Pettis.

Utilisant les propriétès de l'intégrale de Pettis (ou Bochner) nous pouvons prouver que:  $T_1,T_2$ :  $P \cap Q \rightarrow P \cap Q$ .

Soit  $D_N \subset J$  un sous-ensemble dénombrable dense et  $\pi : E^J \to E^{D_N}$  l'application de projection:  $\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}|_{D_N}$ .

Dans l'ouvrage [1] on démontre que  $\pi$  est un homéomorphisme de l'ensemble Q sur  $\pi(Q)$ .

Un résultat de l'ouvrage [21] nous donne que prenant sur E la topologie faible, la topologie produit sur  $E^{DN}$  est la topologie faible de l'espace produit  $E(\tau)^{DN}$  où on prend sur E la topologie  $\tau$  mais, cette dernière topologie est métrisable. Nous obtenons ainsi que l'espace  $E^{DN}$  est un espace localement convexe, métrisable ordonné par un cône normal, fermé et saillant.

Soit  $C = \pi(P \cap Q)$ ; la normalité du cône, les propriétès de l'intégrale de Pettis et l'hypothèse (4°) impliquent que  $T_2$  est un opérateur monotone croissant sur  $P \cap Q$  et  $T_2 \leq T_1$ .

Puisque la projection  $\pi$  est croissante nous obtenons que les opérateurs:  $S_1, S_2$ :  $C \to C$  définis par:  $S_1 \circ \pi = \pi \circ T_1$ ;  $S_2 \circ \pi = \pi \circ T_2$  vérifient les propriétés suivantes.  $S_2$  est monotone croissant sur C et  $S_2 \leq S_1$ . Nous pouvons appliquer e théorème Arino-Gautier-Penot pour l'opérateur  $S_1$  qui nous donne un point fixe  $x_*$  pour l'opérateur  $S_1$  sur l'ensemble C. Le point  $x_*$  est un point fixe pour  $T_1$  et donc une solution du probleme

(c<sub>1</sub>). Nous pouvons aussi appliquer le corollaire l du théorème l à l'opérateur  $S_2$  et au point  $x_*$  et nous obtenons qu'il existe un point fixe  $y_*$  pour l'opérateur  $S_2$  sur l'ensemble C. Le point  $y_*$  est un point fixe pour  $T_2$  et donc une solution du problème (c<sub>2</sub>). La construction du  $y_*$  nous donne aussi que  $y_* \le x_*$  et le théorème est démontré.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Arino, O., Gautier, S., and Penot, J.-P. "A fixed point theorem for sequentially continuous mappings with application to ordinary differential equations" (Prepublication).

[2] Browder, F. E. (1964). "Nonlinear equations of evolution."

Annals of Math. 80, 485-523.

[3] Cellina, A. (1972). "On non existence of solutions of differential equations in non reflexive spaces." Bull. Amer. Math. Soc. 78, 1069-1072.

[4] Chow, S., and Schuur, J. D. (1971). "An existence theorem for ordinary differential equations in Banach spaces."

Bull. Amer. Math. Soc. 77, 1018-1020.

[5] Chow, S., and Schuur, J. D. (1973). "Fundamental theory of contingent differential equations in Banach spaces." Trans. Amer. Math. Soc. 179, 133-144.

[6] Dieudonne, J. (1950). "Deux exemples singuliers d'équations differentielles." Acta Sci. Math. (Szeged) 12, 38-40.

- [7] De Blasi, F. S., and Myjak, J. (1978). "La convergence des approximations successives pour les équations différentielles dans les espaces de Banach est une propriété générique." C.R. Acad. Sci. Paris 286, 29-32.
- [8] Edgar, G. A. (1977). "Measurability in a Banach spaces." Indiana Univ. Math. J. 26, 663-678.
- [9] Fitzgibbon, W. E. (1973). "Weakly continuous accretive operators." Bull. Amer. Math. Soc. 79, 473-374.
- [10] Godunov, A. N. (1975). "Peano's theorem in Banach space." Funct. Anal. i Prilozhen. 9, 59-60.
- [11] Hille, E., and Phillips, R. S. "Functional analysis and semi-groups." A.M.S. Colloquium Publications Vol. 31.
- [12] Isac, G. "Cones localement bornés et cônes complètement réguliers." Applications à l'analyse non-linéaire." (Apparaîtra: Publ. d'Analyse moderne-Univ. Sherbrooke).

[13] Isac, G. (1980). "Un théorème de point fixe pour des opérateurs monotones." (Apparaîtra: Eleftheria).

[14] Knight, W. J. (1974). "Existence of solutions of differential equations in Banach spaces." Bull. Amer. Math. Soc. 80, 148-149.

- [15] Knight, W. J. (1974). "Solutions of differential equations in Banach spaces." Duke Math. J. 41, 437-442.
- [16] Knight, W. J. (1975). "A counter example to a theorem on differential equations in Hilbert spaces." *Proc. Amer. Math. Soc.* 51. 378-380.
- [17] Lasota, A., and Yorke, J. A. (1973). "The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach spaces." J. Diff. Eqs. 13, 1-12.
- [18] Peressini, A. L. (1967). Ordered Topological Vector Spaces. Harper & Row, New York.
- [19] Pianigiani, G. (1978). "A density result for differential equations in Banach spaces." Bull. Acad. Pol. Sci. 26, 791-793.
- [20] Rudin, W. (1966). Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Book Company, Princeton, N.J.
- [21] Schaefer, H. H. (1971). Topological Vector Spaces. Springer-Verlag, New York.
- [22] Vidossich, G. (1974). "Most of the successive approximations do converge." J. Math. Anal. Appl. 45, 127-131.
- [23] Yorke, J. A. (1970). "A continuous differential equation in Hilbert space without existence." Funkcial Ekvac. 13, 19-21.

