

UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE BROUWER

Cezar Avramescu

1. Dans cette note on donne une démonstration du théorème de Brouwer qui utilise seulement les notions élémentaire de l'analyse classique.

Pour simplifier l'exposé nous allons considérer le cas plan; par l'induction, le résultat se généralise immédiatement dans \mathbf{R}^n .

2. Posons $P = [-1,1] \times [-1,1]$.

LEMME. Soient $f, g: P \rightarrow \mathbf{R}$ deux applications continues, telles que,

- (1) $f(-1, y) \geq 0, \quad f(1, y) \leq 0, \quad \forall y \in [-1,1]$
 (2) $g(x, -1) \geq 0, \quad g(x, 1) \leq 0, \quad \forall x \in [-1,1]$.

Alors, le système

- (3) $f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0,$

admet au moins une solution.

DÉMONSTRATION. Posons, pour toute $x \in [-1,1]$,

$$A(x) = \{y \mid y \in [-1,1], g(x, y) = 0\}.$$

Il est aisé de voir que:

- A₁) $A(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in [-1,1].$
 A₂) Pour toute $x \in [-1,1]$, $A(x)$ est fermé et borné, et donc compact.
 A₃) Si $x_n \in [-1,1]$ et $y_n \in A(x_n)$, alors les convergences $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, impliquent $y \in A(x)$.

Définissons l'application $h: [-1,1] \rightarrow [-1,1]$ par

$$h(x) = \sup\{f(x, y) \mid y \in A(x)\}.$$

La compacité de $A(x)$ et la continuité de f nous permettent d'affirmer l'existence d'une application $u: [-1,1] \rightarrow [-1,1]$, telle que,

$$h(x) = f(x, u(x)), \quad u(x) \in A(x).$$

De l'hypothèse (1) on déduit que

$$(4) \quad h(1) \leq 0.$$

Si $h(1) = 0$, alors $(1, u(1))$ est une solution du (3); il reste donc le cas

$$(5) \quad h(1) < 0.$$

L'inégalité (5) implique l'existence d'un nombre α , $\alpha \in [-1, 1]$, tel que,

$$h(x) < 0, \quad \forall x \in]\alpha, 1[.$$

En effet, dans le cas contraire on peut trouver un x_n , tel que

$$(6) \quad x_n \in]1 - 1/n, 1[, \quad h(x_n) \geq 0.$$

Mais

$$h(x_n) = f(x_n, u(x_n)), \quad u(x_n) \in A(x_n).$$

Donc la suite $u(x_n)$ contient une suite partielle $u(x_{n_k})$, qui converge vers un certain $u \in [-1, 1]$. Comme $x_n \rightarrow 1$, de l'inégalité

$$f(x_{n_k}, u(x_{n_k})) \geq 0, \quad u(x_{n_k}) \in A(x_{n_k}),$$

il en résulte,

$$f(1, u) \geq 0, \quad u \in A(1),$$

et donc,

$$h(1) \geq 0,$$

ce qui est en contradiction avec (5).

Donc, il existe des nombres α , tels que,

$$h(x) < 0, \quad \forall x \in]\alpha, 1[$$

Soit,

$$\beta = \inf\{\alpha \mid \forall x \in]\alpha, 1[, \quad h(x) < 0\}.$$

Evidemment, $h(\beta) \leq 0$; montrons que l'inégalité

$$(7) \quad h(\beta) < 0,$$

n'est pas possible. En effet, si (7) a lieu, alors il s'ensuit que $\beta > -1$; de plus, dans la même manière que plus haut, on peut montrer l'existence d'un γ tel que,

$$(8) \quad -1 < \gamma < \beta, \quad \forall x \in]\gamma, \beta[, \quad h(x) < 0$$

Mais l'inégalité (8) infirme la définition de β .

Donc, on a $h(\beta) = 0$ et, par conséquent, une solution du système (3) sera $(\beta, h(\beta))$.

3. Du lemme résulte immédiatement le théorème suivant:

THÉORÈME. Soient $F, G: P \rightarrow [-1, 1]$ deux applications continues.

Alors, le système

$$(9) \quad x = F(x, y), \quad y = G(x, y)$$

admét au moins une solution

En effet, les applications,

$$f(x, y) = F(x, y) - x, \quad g(x, y) = G(x, y) - y,$$

satisfont aux hypothèses du lemme.

4. Evidemment, tout point fixe de l'application

$$(x, y) \rightarrow (F(x, y), G(x, y)),$$

sera une solution du système (3).

5. Il est utile de réfléchir sur les raisons qui permettent d'obtenir une démonstration tant simple pour un théorème tant important.

En tout cas, il faut remarquer l'importance de la droite numérique et de sa relation d'ordre, qui permet d'identifier les ensembles connexes ou convexes avec les intervalles.

En même temps, remarquons que l'application multivoque $x \rightarrow A(x)$ est s.c.s., ce qui constitue l'idée centrale de la démonstration du lemme.

